

Chapitre 8 : Symétrie axiale

I La médiatrice

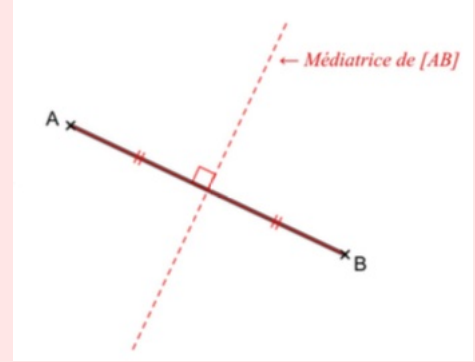
1 Définition



Médiatrice

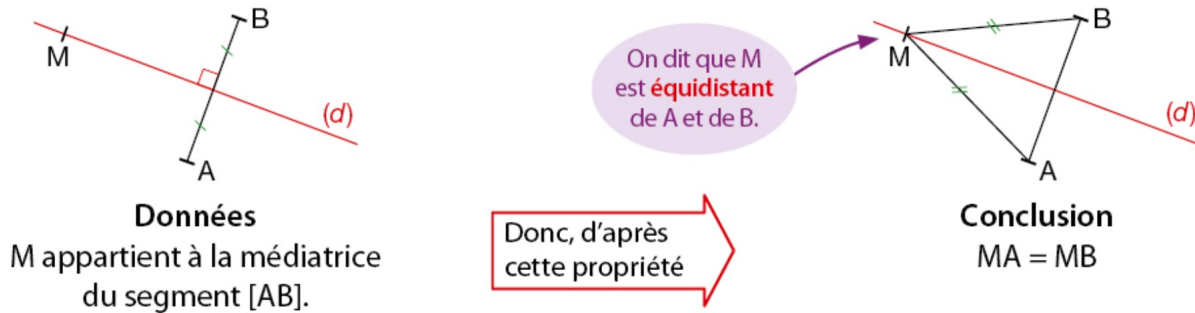
Définition 1.

On appelle **médiatrice d'un segment** la droite perpendiculaire à ce segment et passant par son milieu.



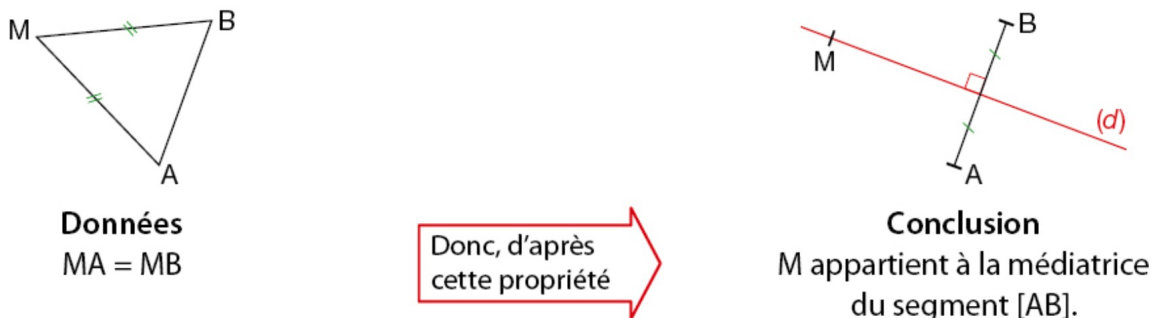
2 Propriétés

Propriété 1. Si un point appartient à la médiatrice d'un segment, **alors** ce point est à égale distance des extrémités de ce segment.



Propriété 2. Réciproque

Si un point est à égale distance des extrémités d'un segment, **alors** ce point appartient à la médiatrice de ce segment.

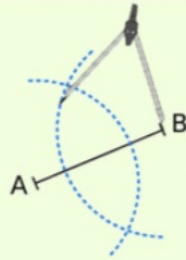


3 Méthode de construction avec un compas

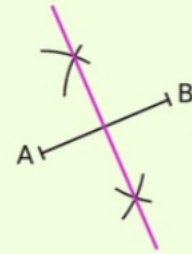
? Ne pas écrire



Pour construire la médiatrice du segment [AB], ...



on trace **deux arcs de cercle de centres A et B**, de même rayon (plus grand que la moitié de AB).

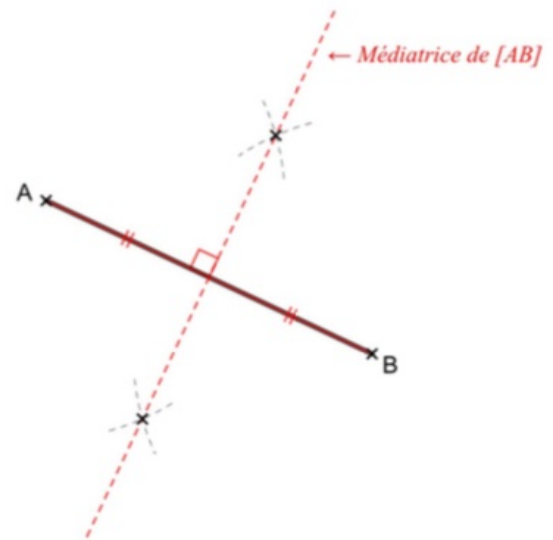


La médiatrice de [AB] est **la droite qui passe par ces deux points**.



Construction de la médiatrice d'un segment au compas

Pour construire la médiatrice d'un segment [AB], on construit deux triangles isocèles de base [AB] : la droite passant par les deux sommets construits est la médiatrice du segment [AB].



Remarque. Construire la médiatrice d'un segment à l'aide du compas permet également de construire le milieu de ce segment sans utiliser la règle graduée.

II Symétrie axiale

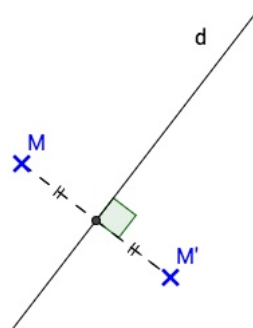
1 Définition



Symétrie d'un point par rapport à une droite

Définition 2.

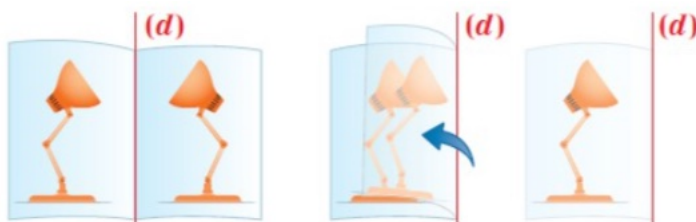
On dit que M et M' sont symétriques par rapport à une droite (d) si (d) est la médiatrice du segment $[MM']$.



Vocabulaire

Dans le cas où M et M' sont symétriques par rapport à la droite (d) , on dit aussi que M' est **l'image du point M par la symétrie d'axe (d)** .

Définition 3. Deux figures sont symétriques par rapport à une droite, si en pliant suivant cette droite, les deux figures se superposent.



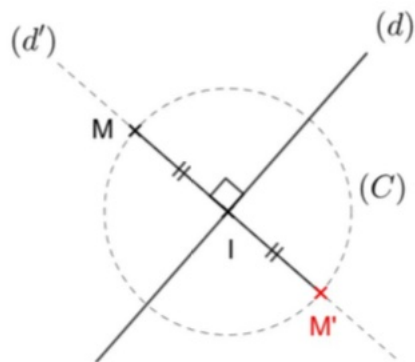
2 Symétrie d'un point par rapport à un axe



Construction avec une équerre et un compas

On considère un point M et une droite (d) . Pour construire le symétrique du point M par rapport à la droite (d) , on peut suivre le protocole de construction suivant :

- Tracer (d') , la perpendiculaire à la droite (d) et passant par le point M .
- Nommer I le point d'intersection des droites (d) et (d') .
- Tracer le cercle \mathcal{C} de centre I et de rayon $[MI]$.
- Nommer M' l'autre point d'intersection de la droite (d') et du cercle \mathcal{C} : M' est l'image du point M par la symétrie d'axe (d) .

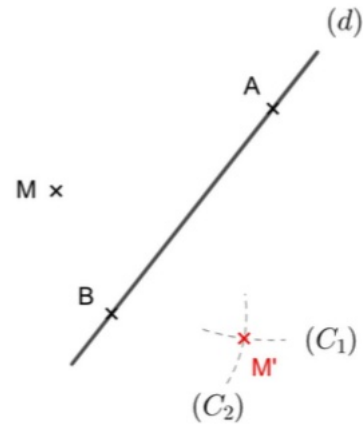




Construction avec le seul compas

On considère un point M et une droite (d) . Pour construire le symétrique du point M par rapport à la droite (d) , on peut suivre le protocole de construction suivant :

- Placer deux points distincts A et B sur la droite (d) .
- Construire le cercle \mathcal{C}_1 de centre A et de rayon $[AM]$.
- Construire le cercle \mathcal{C}_2 de centre B et de rayon $[BM]$.
- Nommer M' l'autre point d'intersection des cercles \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 : M' est l'image du point M par la symétrie d'axe (d) .



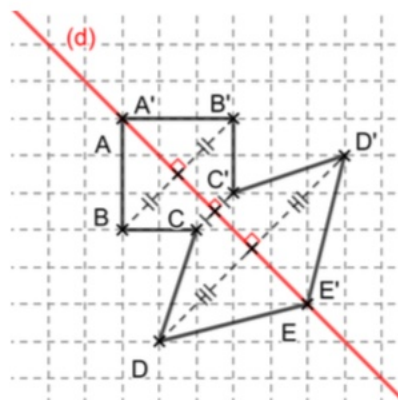
3 Symétrie d'une figure par rapport à un axe



Construction du symétrique d'une figure

Pour construire le symétrique d'une figure par rapport à une droite, on peut commencer par construire le symétrique de chacun des sommets de la figure par rapport à cette droite.

Exemple 1. Construire l'image de la figure ci-contre par la symétrie d'axe (d) .



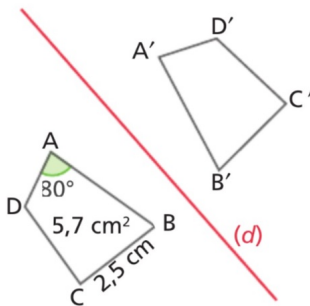
4 Propriétés

Propriété 3. La symétrie axiale conserve les alignements, les longueurs, les mesures d'angle, les périmètres, les aires et les volumes.

Propriété 4. Pour une symétrie axiale, le symétrique d'un segment est un segment de **même longueur**.

Remarque. Pour construire le symétrique d'une droite, on place deux points sur la droite et on construit le symétrique de chacun des deux points. Ensuite on trace la droite reliant ces deux droites.

Exemple 2.



Sur la figure ci-contre, les quadrilatères ABCD et A'B'C'D' sont symétriques par rapport à la droite (d).

1. Déterminer la longueur du segment [B'C']. Justifier votre réponse.
2. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{D'A'B'}$. Justifier votre réponse.
3. Déterminer l'aire du quadrilatère A'B'C'D'. Justifier votre réponse.

Solution :

1. On sait que [B'C'] est l'image du segment [BC] par rapport à la droite (d).

Or, la symétrie axiale conserve les longueurs.

On en déduit que $B'C' = BC = 2,5 \text{ cm}$.

2. On sait que $\widehat{D'A'B'}$ est l'image de l'angle \widehat{DAB} par rapport à la droite (d).

Or, la symétrie axiale conserve les mesures d'angle.

On en déduit que $\widehat{D'A'B'} = \widehat{DAB} = 80^\circ$.

3. On sait que A'B'C'D' est l'image du quadrilatère ABCD par rapport à la droite (d).

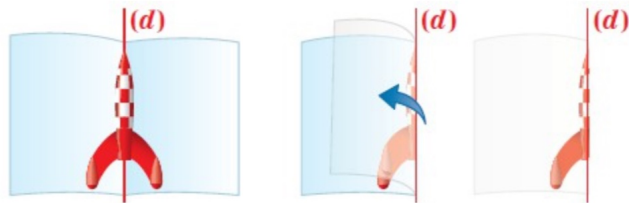
Or, la symétrie axiale conserve les aires.

On en déduit que l'aire du quadrilatère A'B'C'D' est égale à l'aire du quadrilatère ABCD, c'est-à-dire que l'aire du quadrilatère A'B'C'D' est égale à $5,7 \text{ cm}^2$.

III Axes de symétrie

1 Définitions

Définition 4. On dit que (d) est un axe de symétrie d'une figure si, en pliant selon la droite (d), les deux parties de la figure se superposent.



Autre définition

Définition 5. Lorsque le symétrique d'une figure par rapport à une droite est la figure elle-même, on dit que cette droite est un axe de symétrie de la figure.

2 Axes de symétrie des figures usuelles

2.1 A connaître

Propriété 5. Un segment admet deux axes de symétrie : sa médiatrice et le segment lui-même.

Propriété 6. Un angle admet un axe de symétrie : sa bissectrice.

2.2 Compléments

<p>Rectangle</p> <p>Un rectangle a 2 axes de symétrie : les médiatrices de ses côtés</p>	<p>Losange</p> <p>Un losange a 2 axes de symétrie : ses diagonales</p>	<p>Carré</p> <p>Un carré a 4 axes de symétrie</p>	<p>Parallélogramme</p> <p>Un parallélogramme n'a pas d'axe de symétrie</p>
<p>Triangle isocèle</p> <p>Un triangle isocèle a un axe de symétrie : la médiatrice de la base</p>	<p>Triangle équilatéral</p> <p>Un triangle équilatéral a 3 axes de symétrie : les médiatrices des côtés</p>	<p>Segment</p> <p>Un segment a 2 axes de symétrie : la droite qui porte le segment et sa médiatrice</p>	<p>Cercle</p> <p>Un cercle a une infinité d'axes de symétrie : les diamètres</p>