Chapitre 9 : Proportionnalité

I La proportionnalité

1 Définitions

Proportionnalité

Définition 1. On dit que deux grandeurs X et Y sont **proportionnelles** si TOUTES les valeurs de la grandeur Y s'obtiennent en multipliant (ou en divisant) TOUTES les valeurs de la grandeur X par un **même nombre non-nul**. Ce nombre est appelé **coefficient de proportionnalité**.

Exemple 1.

PROPORTIONNEL	NON PROPORTIONNEL
Exemple 1 : Julie achète des pommes à 1,50 € le kg. *Combien coûtent 4 kg de pommes ?*	**Exemple 1 :** A 1 an, Rahim mesurait 0,60 m. *Combien mesurera-t-il à 30 ans ?* 

Solution :

Deux grandeurs

masse :	1 kg	4 kg
prix :	1,5 €	?

$\downarrow \times 1{,}50 \downarrow$

$4 \times 1{,}50 = 6$.
4 kg de pommes coûtent 6 €

C'est une situation de proportionnalité.
Le coefficient de proportionnalité est 1,50.

Deux grandeurs

âge :	1 an	30 ans
taille :	0,60 m	?

$\downarrow \times 0{,}60 \downarrow$

$30 \times 0{,}60 = 18$.
A 30 ans Rahim devrait mesurer 18 m si c'était proportionnel. IMPOSSIBLE !

Ce n'est pas une situation de proportionnalité.
La taille n'est pas proportionnelle à l'âge !

On ne peut pas calculer la taille de Rahim à 30 ans

Exemple 2. Dans une recette de cuisine, la quantité d'ingrédients utilisée est proportionnelle à la quantité de gâteaux à cuisiner.

Définition 2. On considère un tableau de la forme suivante :

Grandeur A			
Grandeur B			

On dit qu'un tableau est **de proportionnalité** si TOUTES les valeurs de la seconde ligne s'obtiennent en multipliant TOUTES les valeurs de la première ligne par un même nombre non-nul. Ce nombre est appelé **coefficient de proportionnalité**.

Exemple 3. Dans la même boulangerie,

— Izia achète 2 croissants pour 2,40 €.
— Astrid achète 5 croissants pour 6 €.
— Tao achète 9 croissants pour 10,20 €.

A l'aide d'un tableau, le prix est-il proportionnel au nombre de croissant achetés ?

Solution :

Nombre de croissants	2	5	9
Prix payé en €	2.40	6	10.20

Pour passer de 2 à 2,40, il faut multiplier 2 par $\frac{2,4}{2} = 1,2$.
Or $5,2 = 6$ et $9 \times 1,2 = 10,80 \neq 10,20$.
On en déduit que ce tableau n'est pas un tableau de proportionnalité et donc, que le nombre de croissants et le prix payé en euro ne sont pas des grandeurs proportionnelles.

Exemple 4. On considère le tableau ci-dessous. S'agit-t-il d'un tableau de proportionnalité ? Justifier votre réponse.

Longueur d'un côté en cm	1	3	5	7
Périmètre du triangle associé en cm	3	9	15	21

Solution : Pour passer de 1 à 3, il faut multiplier 1 par $\frac{3}{1} = 3$.

$$\text{Or } \begin{cases} 3 \times 3 & = 9 \\ 5 \times 3 & = 15 \\ 7 \times 3 & = 21 \end{cases}$$

On en déduit que ce tableau est un tableau de proportionnalité dont le coefficient de proportionnalité est 3 et donc, que la longueur d'un côté de triangle est proportionnelle à son périmètre. (i.e. c'est donc un triangle équilatéral).

2 Calcul de la quatrième proportionnelle

Quatrième proportionnelle

Définition 3. On considère le tableau de proportionnalité suivant :

Grandeur A		
Grandeur B		

Si on connaît trois valeurs de ce tableau, alors on peut calculer la quatrième valeur. Cette quatrième valeur est appelée quatrième proportionnelle.

Pour calculer une quatrième proportionnelle, il existe plusieurs méthodes dont la recherche du **coefficient de proportionnalité**, le **passage à l'unité, l'additivité** et **l'homogénéité**.

Les différentes méthodes seront illustrées sur le problème suivant : « Un primeur vend 4 kg de cerises à 11,20 €. Quel est le prix de 5 kg de cerises ? ». Comme le prix des cerises (en €) est proportionnel à leur masse (en kg), alors le problème énoncé ci-dessus peut être illustré par le tableau de proportionnalité suivant :

Masse en kg	4	5
Prix en €	11.20	

Pour faciliter les calculs, la quatrième proportionnelle sera appelée p.

Recherche du coefficient de proportionnalité

Chercher le coefficient de proportionnalité d'un tableau revient à trouver le nombre par lequel il faut multiplier les valeurs d'une première grandeur pour obtenir les valeurs d'une seconde grandeur.

Dans le cadre de ce problème, cela revient à trouver le nombre par lequel il faut multiplier 4 pour obtenir 11,20.

Pour passer de 4 à 11,20, il faut multiplier 4 par $\dfrac{11,20}{4} = 2,8$, c'est-à-dire qu'il faut multiplier 4 par 2,8.

On en déduit que pour passer de 5 à p, il faut multiplier 5 par 2,8.
Or :$5 \times 2,8 = 14$.
On en déduit que $p = 14$, c'est-à-dire que 5 kg de cerises coûtent 14 €.

$\times$2,8

Masse en kg	4	5
Prix en €	11.20	14

$\times$2,8

Utilisation de l'homogénéité

Utiliser la propriété d'homogénéité revient à trouver le nombre par lequel il faut multiplier les valeurs d'une première colonne pour obtenir les valeurs d'une seconde colonne.

Dans le cadre de ce problème, cela revient à trouver le nombre par lequel il faut multiplier 4 pour obtenir 5.
Pour passer de 4 à 5, il faut multiplier 4 par $\dfrac{5}{4}$, c'est-à-dire qu'il faut multiplier 4 par 1,25.

On en déduit que pour passer de 11,20 à p, il faut multiplier 11,20 par 1,25.
Or : $11,20 \times 1,25 = 14$. On en déduit que $p = 14$, c'est-à-dire que 5 kg de cerises coûtent 14 €.

$\times$1,25

Masse en kg	4	5
Prix en €	11.20	14

$\times$1,25

Utilisation du passage à l'unité et de l'additivité

Utiliser le passage à l'unité revient à trouver la valeur « associée » à 1.
Utiliser la propriété d'additivité revient à additionner les valeurs de deux colonnes pour obtenir la valeur d'une troisième colonne.

Dans le cadre de ce problème, cela revient à trouver le prix d'1 kg de cerises.

Si 4 kg de cerises coûtent 11,20 €, alors 1 kg de cerises, c'est-à-dire pour une quantité quatre fois plus petite, coûteront $11,20 \div 4 = 2,80$ €.

Masse en kg	4	1
Prix en €	11.20	2.80

On va maintenant « reconstituer » 5kg de cerises à l'aide de notre tableau (homogénéité). Cela revient à additionner les prix de 4 kg et d'1 kg de cerises pour obtenir le prix de 5 kg de cerises.
Comme 4 kg de cerises coûtent 11,20 € et comme 1 kg de cerises coûtent 2,80 €, alors $4+1=5$ kg coûteront $11,20+2,80=14$ €.

On en déduit que 5 kg de cerises coûtent 14 €.

Masse en kg	4	1	5
Prix en €	11.20	2.80	14

II Applications

1 Pourcentage

Pourcentage

Définition 4. Un **pourcentage** est une proportion écrite sous forme fractionnaire dont le dénominateur est 100.

<u>Notation</u> : « p % » est une écriture du nombre $\dfrac{p}{100}$.

Propriété 1. *Prendre p % d'une quantité revient à multiplier cette quantité par* $\dfrac{p}{100}$.

Exemple 5.

a) Un yaourt de 125 g contient 14 % de fruits. Quelle masse de fruits y a-t-il dans ce yaourt ?

b) Lors d'un sondage effectué sur 300 personnes, 240 d'entre elles ont affirmé faire du sport au moins deux fois par semaine. Quel pourcentage cela représente-t-il ?

Solution :

a) On sait que 14 % de ce yaourt de 125 g est composé de fruits.

Or : $\dfrac{14}{100} \times 125 = 0,14x125 = 17,5$.

On en déduit que ce yaourt est composé de 17,5 g de fruits.

b) On sait que la proportion de sportifs dans ce sondage vaut $\dfrac{240}{300}$.

Or : $\dfrac{240}{300} = \dfrac{80}{100}$ (Simplification)

On en déduit que 80 % des sondés ont affirmé faire du sport au moins deux fois par semaine.

2 Échelle

Définition 5. On dit qu'un **plan est à l'échelle** si les longueurs mesurées sur le plan sont proportionnelles aux longueurs réelles.

Définition 6. L'échelle d'un plan est le coefficient de proportionnalité qui permet de passer des longueurs réelles aux longueurs mesurées sur le plan, exprimées **dans la même unité**.

Longueur réelle en ...			
Longueur mesurée en ...			

$\times \dfrac{\text{Longueur mesurée}}{\text{Longueur réelle}}$

Remarque. En général, une échelle est exprimée sous la forme d'une fraction dont le numérateur est 1. On exprime la longueur réelle par rapport à 1 cm mesurée sur la carte.

Exemple 6. Sur une carte à l'échelle $\dfrac{1}{500\,000}$, 1 cm mesuré sur la carte représente 500 000 cm dans la réalité.

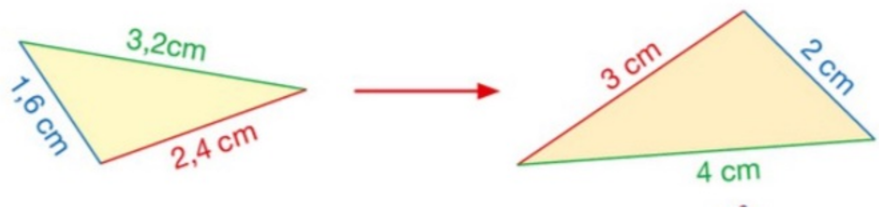
3 Coefficient d'agrandissement et de réduction

Définition 7. Dans un agrandissement ou une réduction, les longueurs de la figure initiale sont proportionnelles aux longueurs de la figure finale. Le nombre qui permet de passer des longueurs de la figure initiale aux longueurs de la figure finale est appelé **rapport d'agrandissement/de réduction**.

Important - vocabulaire :

- Pour **réduire** une figure, on multiplie toutes les longueurs de cette figure par un nombre strictement **compris entre 0 et 1**.
- Pour **agrandir** une figure, on multiplie toutes les longueurs de cette figure par un nombre strictement **supérieur à 1**.

Exemple 7. On considère la figure ci-dessous. Calculer le rapport d'agrandissement.



Solution : On peut construire le tableau de proportionnalité suivant :

Longueur réelle en cm	1.6	2.4	3.2
Longueur mesurée en cm	2	3	4

Pour passer de 1,6 à 2, il faut multiplier 1,6 par $\dfrac{2}{1,6} = 1,25$.

On vérifie $\begin{cases} 2,4 \times 1,25 & = 3\checkmark \\ 3,2 \times 1,25 & = 4\checkmark \end{cases}$

On en déduit que le rapport d'agrandissement est de 1,25.

4 Problème de vitesse constante

Propriété 2. *Sur un trajet, si la vitesse est constante, alors la distance parcourue est proportionnelle à la durée du trajet.*

Exemple 8. Une voiture a parcouru 15 km en 20 minutes. Si la voiture continue à rouler à la même vitesse, quelle distance aura-t-elle parcouru en 30 minutes ?

Solution : On sait que, sur un trajet, si la vitesse est constante, alors la distance parcourue est proportionnelle à la durée du trajet.

Si la voiture parcourt 15 km en 20 minutes, alors elle parcourra $15 \div 2 = 7,5$ km en 10 minutes.

On en déduit que la voiture parcourra $15 + 7,5 = 22,5$ km en $20 + 10 = 30$ minutes.