Chapitre 10 : Périmètres et aires

I Le périmètre

1 Définition

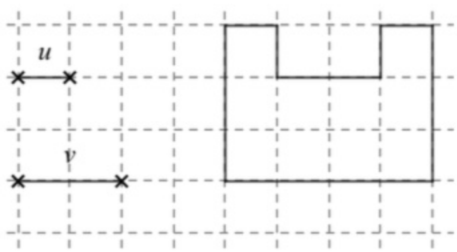
Périmètre

Définition 1. On appelle périmètre d'une figure fermée la LONGUEUR du CONTOUR de cette figure, exprimée en unité de longueur.

Remarque. **A ne pas oublier**

- L'unité de longueur choisie n'est pas toujours le centimètre !
- On NE peut PAS additionner deux longueurs exprimées dans deux unités différentes ! Il faut donc penser à convertir au préalable.

Exemple 1.



Quelle est le périmètre de la figure si l'unité de longueur est u puis v ?

Solution :

- Pour l'unité de longueur u, le périmètre vaut 16 u.
- Pour l'unité de longueur v, le périmètre vaut 8 v.

2 Conversion

Définition 2. Pour faire des conversions d'unités de longueur, on utilise des multiplications et des divisions par 10.

×10 ×10 ×10 ×10 ×10 ×10

km	hm	dam	m	dm	cm	mm

÷10 ÷10 ÷10 ÷10 ÷10 ÷10

km, hm, m... sont appelés unités de longueur.

Exemple 2.

a) Compléter l'égalité suivante : 8,55 km = … m.

b) Compléter l'égalité suivante : 8,55 dm = … dam.

Solution :

a)

$\times 10 \quad \times 10 \quad \times 10 \quad \times 10 \quad \times 10 \quad \times 10$

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
8,	5	5				

Pour passer des kilomètres aux mètres, on se décale de 3 colonnes vers la droite. Comme chaque colonne ne comporte qu'un seul chiffre, alors pour passer des kilomètres aux mètres, on effectue une multiplication par 1 000. D'où : 8,55 km = 8 550 m.

b)

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
				8,	5	5

$\div 10 \quad \div 10 \quad \div 10 \quad \div 10 \quad \div 10 \quad \div 10$

Pour passer des décimètres aux décamètres, on se décale de 2 colonnes vers la gauche. Comme chaque colonne ne comporte qu'un seul chiffre, alors pour passer des décimètres aux décamètres, on effectue une division par 100. D'où : 8,55 dm = 0,085 5 dam.

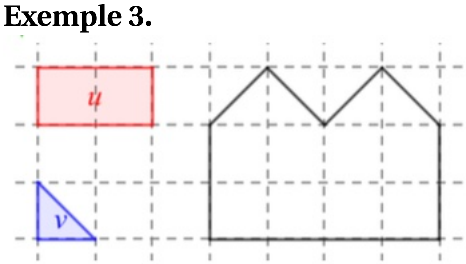
II L'aire

1 Définition

Aire

Définition 3. On appelle **aire** d'une figure fermée la MESURE de la SURFACE contenue dans cette figure, exprimée en unité d'aire.

Exemple 3.



- Si u est l'unité d'aire choisie, alors l'aire de la figure vaut 5 u.
- Si v est l'unité d'aire choisie, alors l'aire de la figure vaut 20 v.

Remarque. Pour mesurer l'aire d'une figure fermée, il suffit de compter le nombre de motifs entiers ou non entiers contenus dans la figure.

2 Conversion

Définition 4. Pour faire des conversions d'unités d'aire, on utilise des multiplications et des divisions par 100.

$\times 100 \quad \times 100 \quad \times 100 \quad \times 100 \quad \times 100 \quad \times 100$

km²	hm²	dam²	m²	dm²	cm²	mm²

$\div 100 \quad \div 100 \quad \div 100 \quad \div 100 \quad \div 100 \quad \div 100$

km^2, hm^2, dam^2, ... sont appelées unités d'aire.

Vocabulaire : km^2 se lit « kilomètre carré », hm^2 se lit « hectomètre carré », ...

Il existe également deux autres unités d'aire souvent utilisées pour exprimer les aires de champ et les superficies de forêt qui sont l'hectare (noté ha) et l'are (noté a). On a 1 ha = 1 hm^2 et 1 a = 1 dam^2 .

km²	hm²		dam²		m²	dm²	cm²	mm²
		ha		a				

Exemple 4.

a) Compléter l'égalité suivante : 25,34 $km^2 = \ldots\ dam^2$.

b) Compléter l'égalité suivante : 25,34 $cm^2 = \ldots\ dm^2$.

Solution :

a)

$\times 100 \quad \times 100 \quad \times 100 \quad \times 100 \quad \times 100 \quad \times 100$

km²		hm²		dam²		m²		dm²		cm²		mm²	
			ha		a								
2	5,	3	4										

Pour passer des kilomètres carrés aux décamètres carrés, on se déplace de 2 colonnes vers la droite. Comme chaque colonne comporte deux chiffres, alors pour passer des kilomètres carrés aux décamètres carrés, on effectue une multiplication par 10 000.

D'où : 25,34 km^2 = 253 400 dam^2 = 253 400 a.

b)

km²		hm²		dam²		m²		dm²		cm²		mm²	
			ha		a								
										2	5,	3	4

÷100 ÷100 ÷100 ÷100 ÷100 ÷100

Pour passer des centimètres carrés aux décimètres carrés, on se déplace d'1 colonne vers la gauche. Comme chaque colonne comporte deux chiffres, alors pour passer des centimètres carrés aux décimètres carrés, on effectue une division par 100.

D'où : $25{,}34\ cm^2 = 0{,}253\,4\ dm^2$

3 Comparaison d'aires

Méthode de superposition

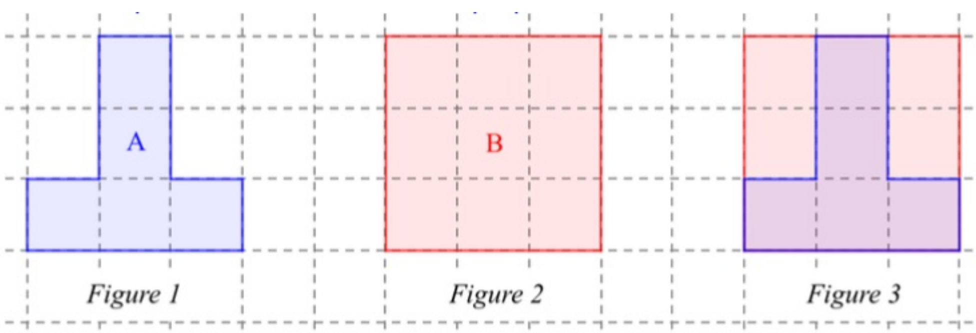


Figure 1 Figure 2 Figure 3

On considère les figures A et B (figures 1 et 2). En les superposant comme fait sur la figure 3, on peut dire que l'aire de la figure B est supérieure l'aire de la figure A.

Méthode dite de « découpage et recollement »

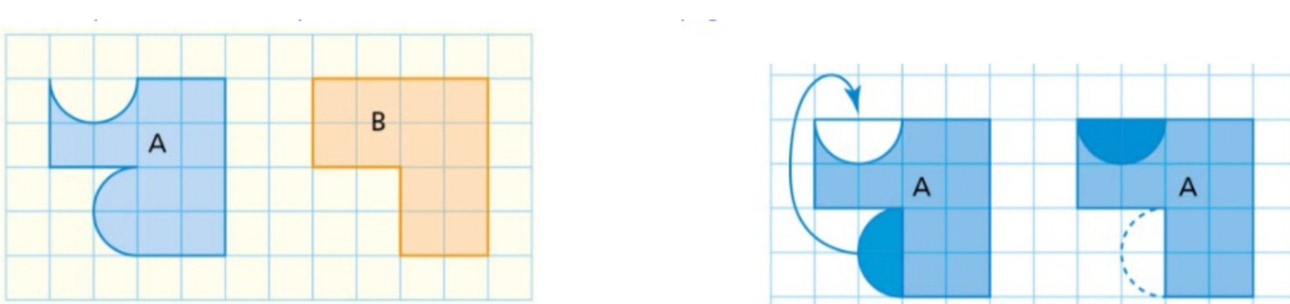


Figure 1 Figure 2

On considère les figures A et B (figure 1). En réagençant une partie de la figure A comme fait sur la figure 2, on peut dire que les figures A et B ont la même aire.

III Calculs de périmètres et d'aires

1 Périmètre

Pour les polygones, , il n'y a pas de formule, il suffit de sommer la longueur de tous les côtés.

Exemple 5. Calculer le périmètre d'un rectangle de 3 dm de longueur et 0,2 m de largeur.

Solution : Attention! Les deux dimensions sont dans des unités différentes. Il faut d'abord tout remettre dans la même unité (au choix) : 3 dm = 0,3 m.

$\mathscr{P} = 0,3 + 0,2 + 0,3 + 0,2 = 1$ m.

Le périmètre de ce rectangle est de 1 m.

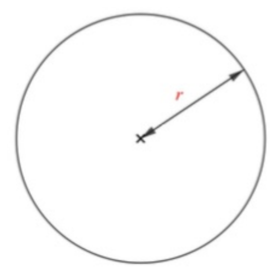
Le cercle :

Propriété 1.

La longueur d'un cercle de rayon r est donné par la formule :

$$L = 2 \times \pi \times r$$

.



Vocabulaire :

- la longueur du cercle est aussi appelée périmètre du cercle ou circonférence du cercle.
- π est une constante et n'est pas décimale! Dans les calculs, on peut utiliser une valeur approchée, par exemple $\pi \approx 3,14$.

Exemple 6.
Calculer le périmètre d'un cercle de 10 mm de rayon.

Solution :

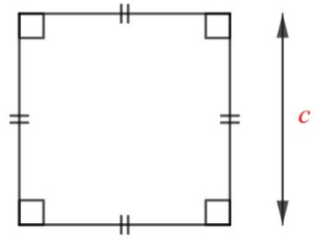
$$\begin{aligned} L &= 2 \times \pi \times r \\ L &= 2 \times \pi \times 10 \\ L &= \underbrace{20 \times \pi}_{\text{valeur exacte}} \\ L &\approx 20 \times 3,14 \\ L &\approx \underbrace{62,83 \quad \text{au centième près}}_{\text{valeur approchée}} \end{aligned}$$

On en déduit que la longueur d'un cercle de 10 mm de rayon vaut environ 62,83 mm.

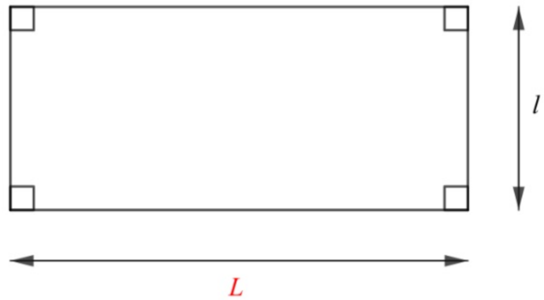
2 Formules d'aires

Propriété 2.

- *L'aire d'un carré de côté* c *est donnée par la formule :* $\mathscr{A} = c \times c$.



- *L'aire d'un rectangle de longueur* L *et de largeur* l *est donnée par la formule :* $\mathscr{A} = L \times l$.



Exemple 7.

a) Calculer l'aire d'un carré de 3 cm de côté.

b) Calculer l'aire d'un rectangle de 3 dm de longueur et 0,2 m de largeur.

Solution :

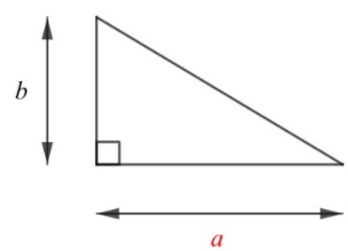
a) $\mathscr{A} = c \times c$
$\mathscr{A} = 3 \times 3$
$\mathscr{A} = 9$
L'aire du carré de 3 cm de côté est de 9 cm^2.

b) $\mathscr{A} = L \times l$
$\mathscr{A} = 0,3 \times 0,2$
$\mathscr{A} = 0,06$
L'aire du rectangle de 3 dm de longueur et de 0,2 m de largeur est de 0,06 m^2, soit 6 dm^2.

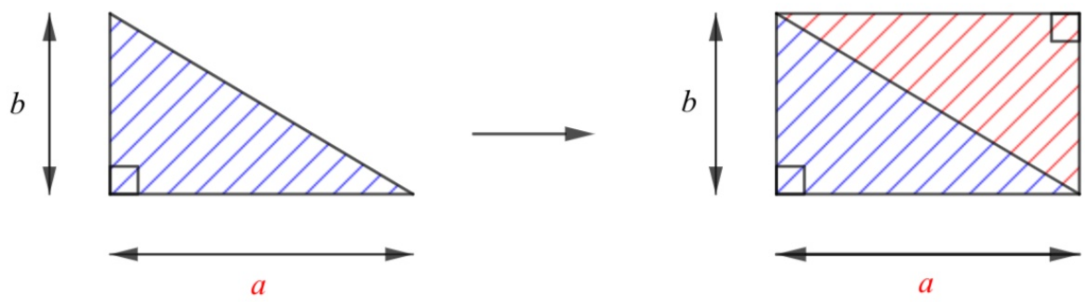
Propriété 3.

L'aire d'un triangle **rectangle** *de côtés de l'angle droit* a *et* b *est donnée par la formule :*

$$\mathscr{A} = \frac{a \times b}{2}$$



<u>Pour le retenir :</u> Un triangle rectangle de côtés de l'angle droit a et b peut être vu comme la moitié d'un rectangle de longueur a et de largeur b.



Exemple 8. On considère ABC un triangle rectangle en B tel que AB = 6 cm, AC = 10 cm et BC = 8 cm. Calculer l'aire de ABC.

<u>Solution :</u>

$$\mathscr{A}(ABC) = \frac{AB \times BC}{2}$$

$$\mathscr{A}(ABC) = \frac{6 \times 8}{2}$$

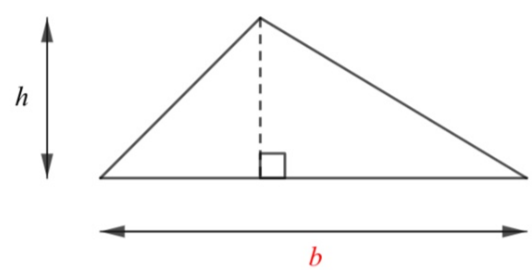
$$\mathscr{A}(ABC) = 24$$

L'aire de ABC vaut 24 cm^2.

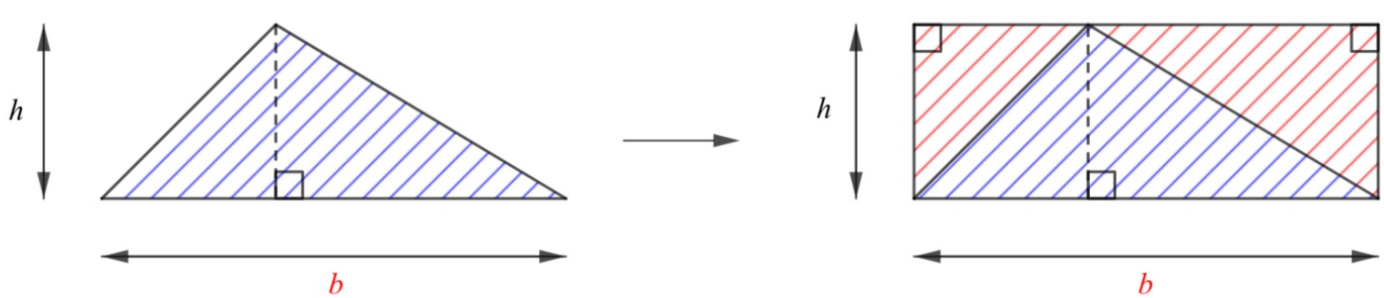
Propriété 4.

L'aire d'un triangle quelconque de base b et de hauteur associée h est donnée par la formule :

$$\mathscr{A} = \frac{b \times h}{2}$$



<u>Pour le retenir :</u> Un triangle quelconque de base b et de hauteur associée h peut être vu comme la moitié d'un rectangle de longueur b et de largeur h.



Exemple 9. On considère un triangle UVW tel que UV = 6 cm et tel que la hauteur HW issue de W dans le triangle UVW mesure 20 cm. Calculer l'aire de UVW.

Solution :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(UVW) &= \frac{UV \times HW}{2}\\ \mathscr{A}(UVW) &= \frac{6 \times 20}{2}\\ \mathscr{A}(UVW) &= 60\end{aligned}$$

L'aire de UVW vaut 60 cm^2.

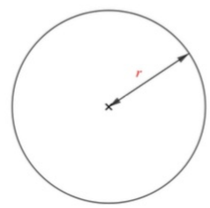
Disque

Définition 5. La surface contenue à l'intérieur un cercle s'appelle un disque.

Propriété 5.

L'aire d'un disque de rayon r est donnée par la formule :

$$\mathbf{A} = \pi \times r \times r.$$



Exemple 10. Calculer l'aire d'un disque de 10 mm de rayon.

Solution :

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \pi \times r \times r\\ \mathscr{A} &= \pi \times 10 \times 10\\ L &= \underbrace{100 \times \pi}_{\text{valeur exacte}}\\ L &\approx 100 \times 3,14\\ L &\approx \underbrace{314 \quad \text{au centième près}}_{\text{valeur approchée}}\end{aligned}$$

On en déduit que la longueur d'un cercle de 10 mm de rayon vaut environ 314 mm^2.