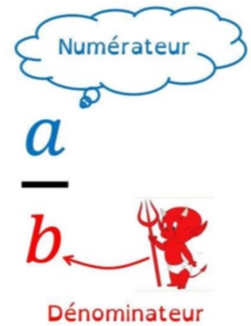
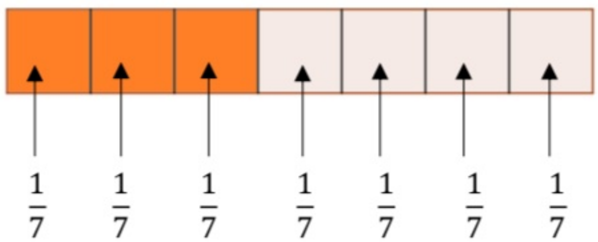
Chapitre 7 : Écriture fractionnaire

I Écriture fractionnaire d'un nombre

Une fraction peut-être utilisée pour exprimer une proportion ou une situation de partage.





La bande ci-dessus est partagée en **7 morceaux identiques** .

➢ Fraction représentant un morceau : $\frac{1}{7}$.

➢ Fraction représentant la partie coloriée : $\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}=3\times\frac{1}{7}=\frac{3}{7}$

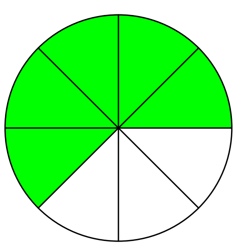
⟵ Nombre de morceaux coloriés

⟵ Nombre de morceaux au total

➢ Fraction représentant toute la bande :
$\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}=7\times\frac{1}{7}=\frac{7}{7}=1$

Exemple 1. Dans une classe de 30 élèves, 12 élèves sont des garçons. On en déduit que la proportion de garçons dans cette classe vaut $\frac{12}{30}$.

Exemple 2. Déterminer la fraction coloriée du disque suivant.



Le disque est partagée en 8 parts égales et 5 sont coloriées : $5\times\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$.

Donc $\frac{5}{8}$ du disque est coloriée.

Quotient comme résultat d'une opération

Définition 1. Le résultat d'une division décimale s'appelle un **quotient**.

Quotient comme nombre

Définition 2. On considère deux nombres a et b avec b un nombre non-nul ($\neq 0$).

Le quotient de a par b, noté $\frac{a}{b}$, est le nombre qui, multiplié par b, donne a. Autrement dit :

$$\frac{a}{b}\times b=a$$

Remarque. Lien entre les deux notions.
Le quotient de a par b peut se noter en ligne par $a \div b$ (au sens de la division décimale) et comme une écriture fractionnaire $\dfrac{a}{b}$. On a

$$a \div b = \frac{a}{b}$$

Exemple 3.

- $\dfrac{9}{5}$ est une écriture fractionnaire du quotient de 9 par 5. En posant la division décimale de 9 par 5, on peut dire que ce quotient admet une écriture décimale : 1,8.
- $\dfrac{1}{6}$ est une écriture fractionnaire du quotient de 1 par 6. En posant la division décimale de 1 par 6, on peut dire que ce quotient n'admet pas d'écriture décimale.

  L'écriture fractionnaire permet donc de noter « plus » de nombres (en considérant les valeurs exactes des nombres).

Fraction décimale

Une **fraction décimale** est une fraction dont le numérateur est un entier et le dénominateur est : 1, 10, 100...

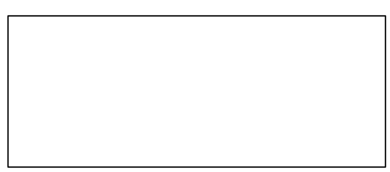
Une fraction s'écrit $\dfrac{\text{Numérateur}}{\text{Dénominateur}}$ (barre de fraction)

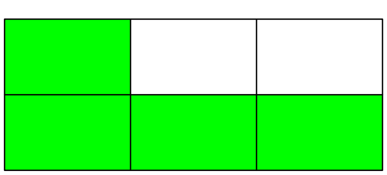
Fraction

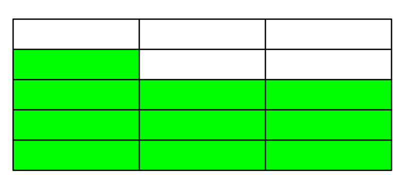
Définition 3. $\dfrac{a}{b}$ s'appelle une fraction lorsque le numérateur et le dénominateur sont des **entiers**.

II Quotients égaux

Partageons le rectangle ci-contre de trois façons différentes







La surface coloriée est :

$\frac{4}{6}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{10}{15}$

Il s'agit de la même surface colorée, donc les fractions $\frac{4}{6}$, $\frac{2}{3}$ et $\frac{10}{15}$ sont égales.

$$\frac{4}{6} \underset{\div 2}{\overset{\div 2}{=}} \frac{2}{3} \qquad\qquad \frac{10}{15} \underset{\div 5}{\overset{\div 5}{=}} \frac{2}{3}$$

Propriété 1. *On NE change PAS la valeur d'une fraction en multipliant (ou en divisant) son numérateur ET son dénominateur par un même nombre non-nul.*

Définition 4. Deux fractions ayant la même valeur sont appelées quotients égaux .

Exemple 4.

- $\frac{9}{5} = \frac{9 \times 3}{5 \times 3} = \frac{27}{15}$ donc $\frac{9}{5}$ et $\frac{5}{3}$ sont des quotients égaux.
- $\frac{10}{6} = \frac{10 \div 2}{6 \div 2} = \frac{5}{3}$, donc $\frac{10}{6}$ et $\frac{5}{3}$ sont des quotients égaux.
- $2 = \frac{2}{1} = \frac{2 \times 5}{1 \times 5} = \frac{10}{5}$

Remarque. Il existe une infinité d'écriture fractionnaire pour un même nombre.

Simplifier une fraction

Définition 5. Simplifier une fraction, c'est trouver une fraction égale dont le numérateur et le dénominateur sont plus petits.

Simplifier une fraction

Pour simplifier une fraction, il faut trouver un nombre qui divise à la fois le numérateur et le dénominateur. Pour cela on utilise les tables de multiplications et les critères de divisibilité.

Exemple 5. Simplifier la fraction $\frac{14}{49}$.

Deux méthodes sont possibles d'après la définition des quotients égaux, soit par division soit par multiplication.

$$\frac{14}{49} \underset{\div 7}{\overset{\div 7}{=}} \frac{2}{7} \qquad\qquad \frac{14}{49} = \frac{7 \times 2}{7 \times 7} = \frac{2}{7}$$

Exemple 6. Simplifier les fractions suivantes :

a) $\dfrac{25}{30}$ b) $\dfrac{24}{120}$ c) $\dfrac{36}{40}$

Solution :

$\dfrac{25}{30} = \dfrac{25 \div 5}{30 \div 5} = \dfrac{5}{6}$ $\dfrac{24}{120} = \dfrac{24 \div 2}{120 \div 2} = \dfrac{12}{60} = \dfrac{12 \div 12}{60 \div 12} = \dfrac{1}{5}$ $\dfrac{36}{40} = \dfrac{364}{40 \div 4} = \dfrac{9}{10}$

III Applications

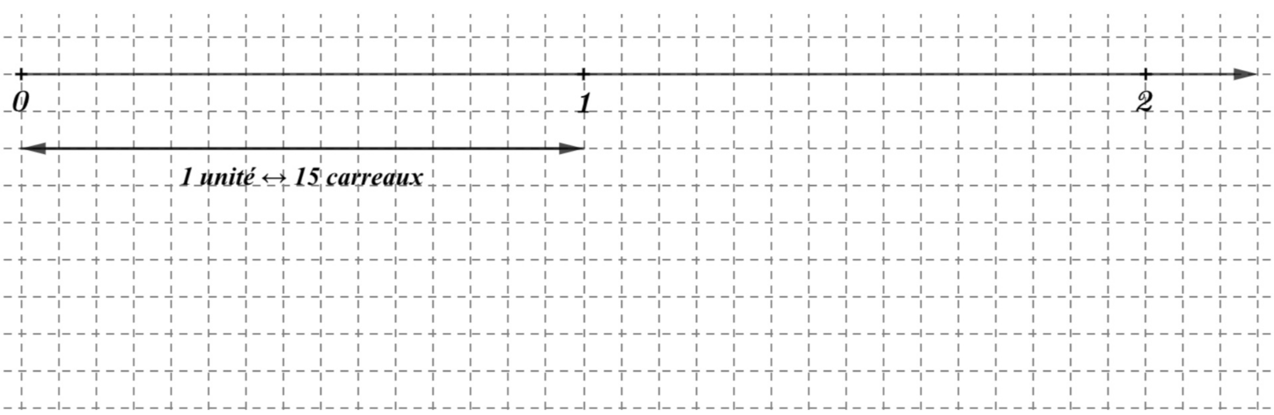
1 Droite graduée

La fraction $\dfrac{a}{b}$ peut se placer sur une demi-droite graduée (avec $b \neq 0$).

Placer une fraction sur une droite graduée

- Le dénominateur b indique en combien de parts égales il faut partager l'unité (la distance entre 0 et 1).
- Le numérateur a indique combien de parts il faut prendre.

Exemple 7. Placer les points $A(\dfrac{9}{5})$ et $B(\dfrac{5}{3})$ sur une droite graduée.



Solution :

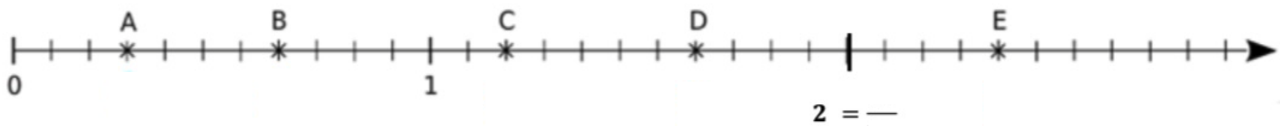
a) Pour placer le point A d'abscisse $\dfrac{9}{5}$, on partage chaque unité en 5 parties égales, et on en prend 9 à partir de l'origine.

b) Pour placer le point B d'abscisse $\dfrac{5}{3}$, on partage chaque unité en 3 parties égales, et on en prend 5 à partir de l'origine.

Exemple 8. Lecture

Déterminer les abscisses des points A, B, C, D et E sous forme de fraction.

A( ) ; B( ) ; C( ) ; D( ) et E( ).



Deux entiers consécutifs sont deux entiers qui se suivent.

2 Encadrement par deux entiers

Encadrer une fraction par deux entiers

On considère a et b deux entiers avec b non-nul. Pour encadrer la fraction $\dfrac{a}{b}$ entre deux entiers consécutifs, on pose la division euclidienne de a par b : la fraction $\dfrac{a}{b}$ est comprise entre le quotient et son consécutif.

Exemple 9.

a) Encadrer $\dfrac{9}{5}$ par deux entiers consécutifs.

Solution : $\begin{array}{r|l} 9 & 5 \\ \cline{2-2} -\,5 & 1 \\ \cline{1-1} 4 & \end{array}$. Donc $9 = 5 \times 1 + 4$. On en déduit que $1 < \dfrac{9}{5} < 2$

b) Encadrer $\dfrac{17}{5}$ par deux entiers consécutifs.

Solution : $\begin{array}{r|l} 17 & 5 \\ \cline{2-2} -\,15 & 3 \\ \cline{1-1} 2 & \end{array}$. Donc $17 = 5 \times 3 + 2$. On en déduit que $3 < \dfrac{17}{5} < 4$

3 Nombres mixtes

Définition 6. On appelle nombre mixte la décomposition de ce nombre sous la forme de la somme d'un nombre entier et d'une fraction plus petite que 1.

Ecriture d'une fraction sous la forme d'un nombre mixe

On considère deux nombres a et b avec $b \neq 0$. Pour écrire la fraction $\frac{a}{b}$ sous la forme d'un nombre mixte, il suffit de poser la division euclidienne de a par b. Alors

$$\text{quotient} + \frac{\text{reste}}{b}$$

est une écriture mixte de la fraction $\frac{a}{b}$.

Exemple 10. a) En reprenant les deux exemples précédents, écrire $\frac{9}{5}$ et $\frac{17}{5}$ sous la forme de nombre mixte.

Solution :

➢ $\frac{9}{5} = 1 + \frac{4}{5}$

➢ $\frac{17}{5} = 3 + \frac{2}{5}$

b) Écrire le nombre 1,25 sous la forme de nombre mixte.

Solution : Par décomposition *Partie entière* et *Partie décimale*, $1,25 = 1 + 0,25 = 1 + \frac{25}{100}$.

4 Addition de deux fractions de même dénominateur

Propriété 2. *Pour additionner deux fractions ayant le même dénominateur, on additionne les numérateurs entre eux et on garde le dénominateur commun.*

Exemple 11. $\frac{9}{5} + \frac{4}{5} = \frac{9+4}{5} = \frac{12}{5}$ $\qquad$ $\frac{17}{3} + \frac{2}{3} = \frac{17+2}{3} = \frac{19}{3}$

5 Fraction d'une quantité

Multiplier un nombre par une fraction

Pour calculer « $c \times \frac{a}{b}$ », on peut utiliser l'une des trois méthodes suivantes :

Méthode 1 : On multiplie le nombre par le numérateur, puis on divise par le dénominateur	Méthode 2 : On divise le nombre par le dénominateur, puis on multiplie par le numérateur	Méthode 3 : On écrit la fraction en écriture décimale puis on multiplie par le nombre

Exemple 12. Calculer $A = 45 \times \frac{3}{10}$

Solution :

$A = 45 \times \frac{3}{10}$ $A = (45 \times 3) : 10$ $A = 135 : 10$ $A = 13{,}5$	$A = 45 \times \frac{3}{10}$ $A = (45 : 10) \times 3$ $A = 4{,}5 \times 3$ $A = 13{,}5$	$A = 45 \times \frac{3}{10}$ $A = 45 \times (3 : 10)$ $A = 45 \times 0{,}3$ $A = 13{,}5$

Remarque.

- la méthode 1 est plus souvent utilisée.
- la méthode 3 est utilisée seulement si la fraction peut s'écrire sous la forme d'un nombre décimal, sinon le résultat est une valeur approchée.

Propriété 3. *Pour calculer la fraction d'une quantité, on* ***multiplie*** *la fraction par la quantité*

Exemple 13.

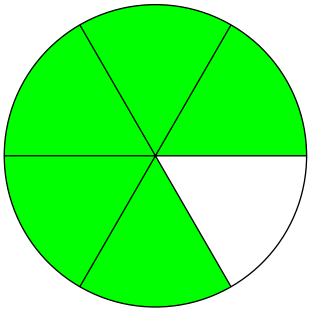
1. Prendre les $\frac{5}{6}$ de 3 kg.

   Solution : On calcule $\frac{5}{6}$ de 3, soit $\frac{5}{6} \times 3 = (5 \times 3) \div 6 = 15 \div 6 = 2{,}5$ kg

2. Léa a réalisé un saut d'une hauteur de 0,80 mètre. Paul a réalisé un saut d'une hauteur égale à $\frac{3}{4}$ de celle de Léa. Quelle a été la hauteur du saut réalisé par Paul ?

   Solution :

   On sait que Paul a réalisé un saut d'une hauteur égale au $\frac{3}{4}$ de 0,80 mètre.
   Or : $\frac{3}{4} \times 0{,}8 = (3 \div 4) \times 0{,}8 = 0{,}75 \times 0{,}8 = 0{,}6$.
   On en déduit que Paul a réalisé un saut d'une hauteur de 0,6 mètre.

3. Thomas possède 12 000 € sur son compte en banque et souhaite en donner $\frac{2}{3}$ à sa fille. Quelle somme d'argent Thomas va-t-il donner à sa fille ?

   Solution :
   On sait que Thomas a fait don à sa fille de $\frac{2}{3}$ de ses 12 000€.
   Or : $\frac{2}{3} x 12000 = (2 \times 12000) \div 3 = 24000 \div 3 = 8000$.

   On en déduit que Thomas a fait don de 8 000 € à sa fille.