Chapitre 5 : Division

Savoirs-faire

- Je connais le vocabulaire de la division.
- Je sais poser une division euclidienne et l'interpréter.
- Je sais poser une division décimale et l'interpréter.
- Je connais les critères de divisibilité par 2; 3; 4; 5; 9 et 10.

I La division

1 Division euclidienne

Danger
On travaille uniquement avec des nombres entiers!

Division euclidienne

Définition 1. Effectuer la **division euclidienne** d'un nombre entier, appelé **dividende**, par un nombre entier non-nul ($\neq 0$), appelé **diviseur**, c'est déterminer deux nombres entiers, appelés quotient et reste tels que :

- Dividende = Diviseur × Quotient + Reste
- avec $0 \leq$ Reste < Diviseur

Exemple 1. Exemple simple : déterminer la division euclidienne de 42 par 12.
Par tâtonnement (utilisation de la table de 12, quotient compris entre 3 et 4), on obtient

$$42 = 12 \times 3 + 8$$

On vérifie que $0 \leq 8 < 12$.

Exemple 2. Déterminer la division euclidienne de 1 853 par 7.

On va poser l'opération avec une « potence ».

Potence

On commence par regarder le chiffre le plus à gauche dans 1 853 : c'est le « 1 ».

Or, comme $1 < 7$, on regarde le nombre formé par les deux chiffres les plus à gauche dans 1 853 : c'est le « 18 ».
Comme $18 > 7$, alors on peut commencer à poser la division euclidienne de 1 853 par 7 comme ceci :

$$
\begin{array}{rrrr|l}
 & 1 & 8 & 5 \; 3 & 7 \\
\cline{5-5}
- & 1 & 4 & & 264 \\
\cline{2-3}
 & & 4 & 5 & \\
 & - & 4 & 2 & \\
\cline{3-4}
 & & 3 & 3 & \\
 & - & 2 & 8 & \\
\cline{3-4}
 & & & 5 &
\end{array}
$$

On cherche le nombre maximum de fois où on peut « mettre » 7 dans 18.

Comme $7 \times 2 < 18 < 7 \times 3$, alors on en déduit qu'il y va 2 fois 7 au maximum.

Il reste donc $18 - 14 = 4$.

On abaisse 5 et on cherche le nombre maximum de fois où on peut « mettre » 7 dans 45.

Comme $7 \times 6 < 45 < 7 \times 7$, alors on en déduit qu'il y a 6 fois 7 au maximum dans 45 et qu'il reste 3.

On abaisse 3 et on cherche le nombre maximum de fois où on peut « mettre » 7 dans 33.

Comme $7 \times 4 < 33 < 7 \times 5$, alors on en déduit qu'il y va 4 fois 7 au maximum dans 33 et qu'il reste alors 5.

On ne peut plus diviser car $5 < 7$, on a donc l'écriture suivante

$$1\,853 = 7 \times 264 + 5$$

On vérifie que $0 \leq 5 < 7$.

2 Vocabulaire diviseur et multiple

Multiple et diviseur

Définition 2. On considère a et b deux nombres entiers avec b non-nul ($\neq 0$).

On dit que a est un **multiple** de b ou que b est un **diviseur** de a si le reste de la division euclidienne de a par b vaut 0.

Exemple 3.

a) 36 est-il divisible par 9 ?
b) 35 est-il divisible par 5 ?
c) Donne les 3 premiers multiples de 9.
d) Donne les diviseurs de 18.

Solution :

a) Comme $36 = 9 \times 4 + 0$, c'est-à-dire que le reste de la division euclidienne de 36 par 9 est 0, alors on peut dire que 36 est un multiple de 9 ou encore que 9 est un diviseur de 36.
b) Comme $35 = 6 \times 5 + 5$, c'est-à-dire que le reste de la division euclidienne de 35 par 6 est 5, alors on peut dire que 35 n'est pas un multiple de 6 ou encore que 6 n'est pas un diviseur de 35.
c) 0, 9, 18
d) 18, 1, 9, 2, 6, 3 (Méthode du sourire)

3 Critères de divisibilité

Propriété 1. *Un nombre ENTIER est divisible par :*

a) 2 si et seulement si son chiffre des unités est : 0 ; 2 ; 4 ; 6 ou 8.

b) 5 si et seulement si son chiffre des unités est 0 ou 5.

c) 10 si et seulement si son chiffre des unités est 0.

Propriété 2. *Un nombre ENTIER est divisible par :*

a) 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est un multiple de 3.

b) 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.

Propriété 3. *Un nombre ENTIER est divisible par 4 si et seulement si le nombre formé par son chiffre des dizaines et son chiffre des unités est un multiple de 4.*

Exemple 4. 1284 est-il divisible par 2 ? par 3 ? par 4 ? par 5 ? par 9 ? par 10 ? Justifier soigneusement votre réponse.

Solution : Le chiffre des unités dans 1 284 est « 4 ». On en déduit que 1 284 est divisible par 2, mais pas par 5, ni par 10. La somme des chiffres de 1 284 est égale à $1+2+8+4=15$. On en déduit que 1 284 est divisible par 3 (car $15=3\times5+0$, c'est-à-dire que 15 est un multiple de 3), mais pas par 9 (car $15=9\times1+6$, c'est-à-dire que 15 n'est pas un multiple de 9).

Le nombre formé par le chiffre des dizaines et le chiffre des unités de 1 284 est « 84 ». On en déduit que 1 284 est divisible par 4 (car $84=4\times21+0$, c'est-à-dire que 84 est un multiple de 4).

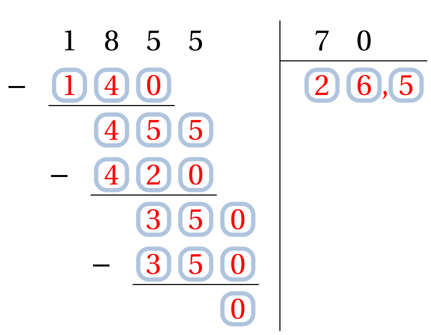
II Division décimale

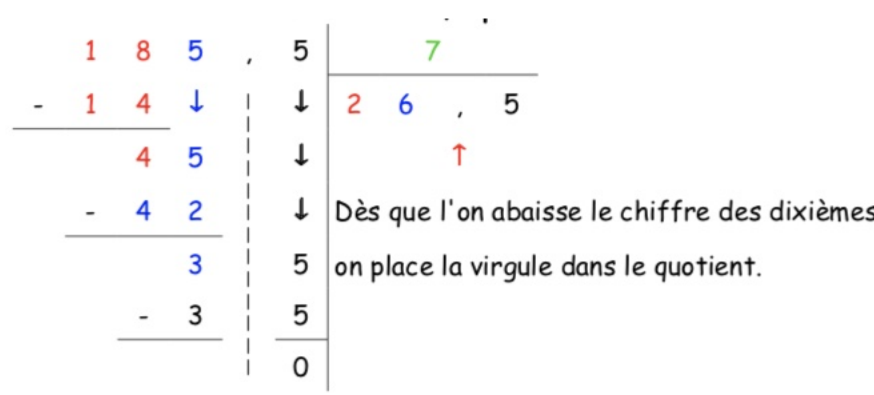
Définition 3. Effectuer la **division décimale** d'un nombre décimal, appelé **dividende**, par un nombre entier non-nul ($\neq 0$), appelé **diviseur**, c'est déterminer le nombre, appelé **quotient**, tel que :

$$\text{Dividende} = \text{Diviseur} \times \text{Quotient}$$

Remarque. Un nombre entier est un nombre décimal.

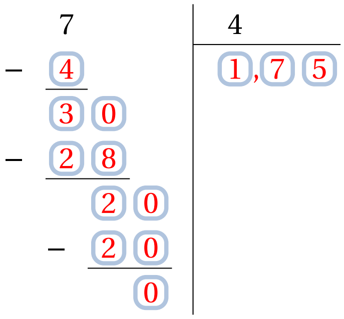
Exemple 5. Poser la division décimale de 185,5 par 7.

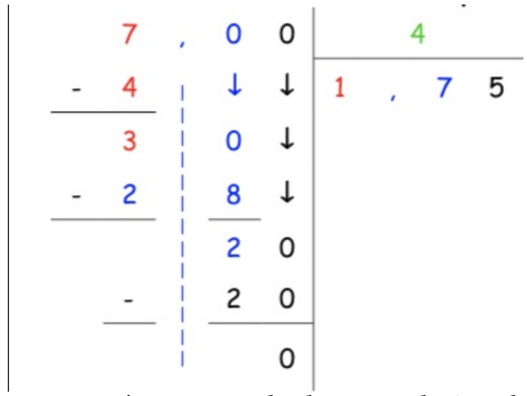




On obtient alors l'égalité $185,5 = 7 \times 26,5$. On peut aussi écrire $185,5 \div 7 = 26,5$. Dans la division décimale de 185,5 par 7, 185,5 est le dividende, 7 est le diviseur et 26,5 est le quotient.

Exemple 6. Poser la division décimale de 7 par 4.





Explication : Comme le reste de la division de 7 par 4 n'est pas nul, alors on abaisse le chiffre des dixièmes qui est un 0, puis on cherche le nombre maximal de fois où on peut « mettre » dans 30.

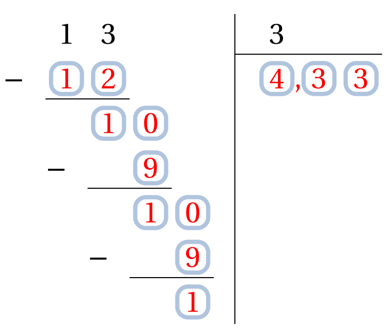
Comme le reste de la division de 30 par 4 n'est pas nul, alors on abaisse le chiffre des centièmes qui est un 0, puis on cherche le nombre maximal de fois où on peut « mettre » 7 dans 20.

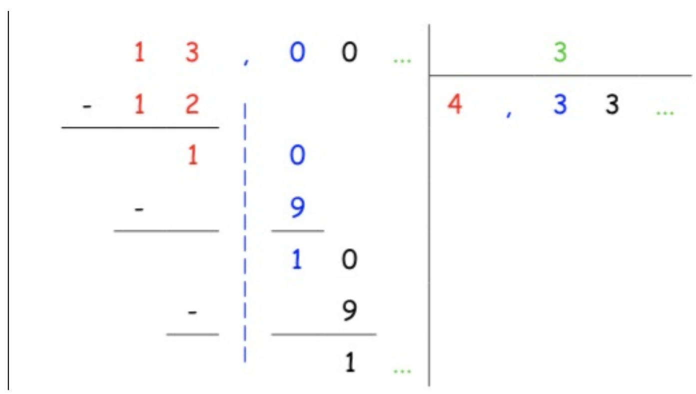
Comme le reste de de la division de 20 par 4 est nul, alors on s'arrête.

On obtient l'égalité $7 = 4 \times 1,75$ ou $7 \div 4 = 1,75$. Dans la division décimale de 7 par 4, 7 est le dividende, 4 le diviseur et 1,75 le quotient.

Que se passe-t-il si la division décimale ne « s'arrête » pas ? Alors on ne peut pas donner de valeur décimale exacte du quotient, on en donne seulement des valeurs approchées.

Exemple 7. Calculer la division décimale de 13 par 3.





On remarque que le reste est toujours égal à 1. On ne peut donc pas donner de valeur décimale exacte du quotient mais on peut écrire :

- $13 \div 3 \approx 4$ à l'unité près
- $13 \div 3 \approx 4,3$ au dixième près
- ...

III Troncatures et arrondis

1 Troncature

Définition 4. Une troncature est une valeur approchée par défaut

Exemple 8. La troncature du nombre 148,572 est
- Au centième près : 148,57
- Au dixième près : 148,5
- A l'unité près : 148

2 Arrondi

Arrondir un nombre

1. On « coupe » le nombre un rang plus à droite que celui attendu.
2. Puis
   - Si le dernier chiffre est 0, 1, 2, 3 ou 4, on supprime ce dernier chiffre (remplacé par 0)
   - Si le dernier chiffre est 5, 6, 7, 8 ou 9, on supprime le dernier chiffre et on ajoute une unité au rang attendu (on propage si besoin).

Exemple 9. L'arrondi du nombre 364,728
- Au centième près est : ....
- Au dixième près est : ......
- A l'unité près : ....