Chapitre 27 : Probabilités

I Notion de probabilité

A Approche intuitive

Exemple 1. Dans une boîte de 13 bonbons, on trouve un bonbon à la menthe, 5 à la fraise, 3 au citron et 4 à l'orange.

Si je pioche un bonbon au hasard :

— j'ai une chance sur 13 d'obtenir un bonbon à la menthe, la probabilité d'obtenir un bonbon à la menthe est de $\frac{1}{13}$

— j'ai 5 chances sur 13 d'obtenir un bonbon à la fraise, la probabilité d'obtenir un bonbon à la fraise est de $\frac{5}{13}$

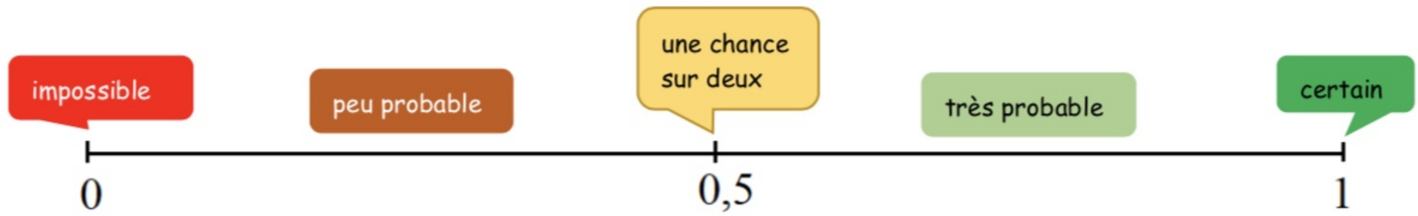
— j'ai trois chances sur 13 d'obtenir un bonbon au citron, la probabilité d'obtenir un bonbon au citron est de $\frac{3}{13}$

— j'ai quatre chances sur 13 d'obtenir un bonbon à l'orange, la probabilité d'obtenir un bonbon à l'orange est de $\frac{4}{13}$

B Probabilité d'un évènement

Notation : la probabilité d'un évènement A se note p(A)

Propriété 1.
Une probabilité est un nombre compris entre 0 et 1 (fraction, nombre décimal ou pourcentage)
La probabilité de l'événement impossible est égale à 0
La probabilité de l'événement certain est égale à 1
La somme des probabilités de tous les événements élémentaires est égale à 1.



Exemple 2. On lance une pièce de monnaie non truquée, on note F l'évènement « obtenir Face ». Calculer $p(F)$, donner le résultat sous forme fractionnaire, décimale et en %.

Solution : $p(F) = \frac{1}{2}$ ou $p(F) = 0.5$ ou $p(F) = 50\%$

Exemple 3. Dans le sachet de bonbons d'Olivier, il n'y a que des bonbons à la fraise. Olivier pioche au hasard.

1. Comment appelle-t-on l'évènement « obtenir un bonbon à la fraise » ? Quelle est sa probabilité ?
2. Comment appelle-t-on l'évènement « obtenir un bonbon au citron » ? Quelle est sa probabilité ?

Solution :

1. « Obtenir un bonbon à la fraise » est un évènement certain, sa probabilité est de 1
2. « Obtenir un bonbon au citron » est un évènement impossible, sa probabilité est de 0

Exemple 4. Un sac contient des jetons bleus, rouges et noirs. La probabilité de tirer un jeton bleu est de 0.35, la probabilité de tirer un jeton rouge est de 0.4. Calculer la probabilité de tirer un jeton noir.

Solution : La somme de toutes les probabilités des évènements élémentaires est égale à 1

$p(\text{"obtenir un jeton bleu"}) + p(\text{"obtenir un jeton rouge"}) + p(\text{"obtenir un jeton noir"}) = 1$

$0.35 + 0.4 + p(\text{"obtenir un jeton noir"}) = 1$

$p(\text{"obtenir un jeton noir"}) = 0.25$

La probabilité d'obtenir un jeton noir est de 0.25

II Équiprobabilité

Définition 1. Dans une expérience aléatoire, lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité , on dit qu'il s'agit d'une situation d'équiprobabilité .

Exemple 5. Dé cubique, chaque événement élémentaire a une chance sur 6 de sortir :
$p(\text{« 1 »}) = p(\text{« 2 »}) = p(\text{« 3 »}) = p(\text{« 4 »}) = p(\text{« 5 »}) = p(\text{« 6 »}) = \frac{1}{6}$, c'est donc une situation d'équiprobabilité

Propriété 2. *Dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement est égale au quotient*

$$p(A) = \frac{\textit{Nombre d'issues favorables à l'événement } A}{\textit{Nombre d'issues possibles}}$$

Exemple 6. L'expérience consiste à choisir au hasard une lettre du mot MATHEMATIQUES. Quelle est la probabilité de l'évènement V :« obtenir une voyelle » ?

Solution : Chaque lettre du mot a la même probabilité d'être tirée, il s'agit d'une situation qu'équiprobabilité.
Il y a 6 voyelles : A - E - A - I - U - E sur 13 lettres au total. $p(V) = \frac{6}{13}$

Exemple 7.

Trois personnes Aline, Bernard et Claude ont chaune un sac de billes. Chacun tire au hasrd une bille de son sac.

1. Laquelle de ses personnes a la probabilité la plus grande de tirer une bille rouge ?
2. On souhaite qu'Aline ait la même probabilité que Bernard de tirer une bille rouge. Avant le tirage, combien de billes noires faut-il ajouter pour cela dans le sac d'Aline ?

Sac d'Aline :	Sac de Bernard :	Sac de Claude :
5 billes rouges	10 billes rouges et 30 billes noires	100 billes rouges et 3 billes noires

Solution :

1. Aline : $p = \frac{5}{5} = 1$

   Bernard : $p = \frac{10}{40} = \frac{1}{4} = 0,25$

   Claude : $p = \frac{100}{103} \approx 0,97$

   Donc Aline a la plus grande probabilité de tirer une bille rouge.
2. Pour qu'Aline ait la même probabilité que Bernard de tirer une bille rouge, il faut que le sac d'Aline, il y ait $\frac{1}{4}$ de billes rouges et $\frac{3}{4}$ de billes noires (ratio 1 :3). Il faut donc mettre trois fois plus de billes noires que de billes rouges.

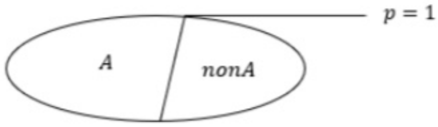
   En mettant, $3 \times 5 = 15$ billes noires dans le sac, la probabilité de tirer une bille rouge sera de $p = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$. C'est bien la même probabilité que Bernard.

III Évènement contraire

Propriété 3. *Événement contraire*
Soit A un événement

La somme de la probabilité de A et de son contraire $\bar{A}$ est égale à 1.

$p(A) + p(\bar{A}) = 1$



Conséquence :
Soit A un évènement. La probabilité de l'évènement $\bar{A}$ est $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$

Exemple 8. On sélectionne une lettre au hasard sans un mot. La probabilité d'obtenir un voyelle est de 0.1. Quelle est la probabilité d'obtenir une consonne ?

Solution : Les évènements « obtenir une voyelle » et « obtenir une consonne » sont des évènement contraires. Donc la probabilité d'obtenir une consonne est de $p(C) = 1 - 0.1 = 0.9$

Exemple 9. Tom a chargé ses titres favoris sur son téléphone : 7 chansons de variété française, 3 titres de rap, 4 de pop internationale et 6 de jazz. Elle utilise la fonction « aléatoire » de son téléphone.

1. On note J l'évènement « le titre diffusé est du jazz ». Quelle est sa probabilité ?
2. (a) Définir par une phrase l'évènement non J ou $\bar{J}$
   (b) Calculer sa probabilité

Solution :

1. Dans son téléphone, il y a $7 + 3 + 4 + 6 = 20$ titres, donc $p(J) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$
2. (a) Non J : « le titre diffusé n'est pas du jazz »
   (b) $p(\bar{J}) = 1 - p(J) = \frac{7}{10}$