Chapitre 23 : Double distributivité

I Formule de double distributivité

Propriété 1. *On considère a, b, c, d quatre nombres relatifs*

$$(a+b)(c+d) = \boldsymbol{a \times c + a \times d + b \times c + b \times d}$$

Démonstration

Soient a, b, c et d quatre nombres relatifs (donc positif et négatif).
Soit l'expression

$$A = (a+b)(c+d)$$

Notons $k = (a+b)$, on a

$$\begin{array}{lcll}
A & = & (a+b)(c+d) & \\
A & = & k(c+d) & \text{on remplace (a+b) par k} \\
A & = & k \times c + k \times d & \text{par simple distributivité} \\
A & = & (a+b) \times c + (a+b) \times d & \text{par remplacement de k} \\
A & = & a \times c + b \times c + a \times d + b \times d & \text{par simple distributivité} \\
A & = & a \times c + a \times d + b \times c + b \times d &
\end{array}$$

Remarque. On applique donc deux fois la simple distributivité

Exemple 1. Développer et réduire les expressions suivantes

$A = (x+3)(x+4)$
$B = (3x-1)(-2x+3)$
$C = (-x+5)(5-y)$
$D = (3x-7)^2$

Solution :

$$\begin{array}{lcl}
A & = & (x+3)(x+4) \\
A & = & x \times x + x \times 4 + 3 \times x + 3 \times 4 \\
A & = & x^2 + 7x + 12
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
B & = & (3x-1)(-2x+3) \\
B & = & 3x \times (-2x) + 3x \times 3 + (-1) \times (-2x) + (-1) \times 3 \\
B & = & -6x^2 + 9x + 2x - 3 \\
B & = & -6x^2 + 11x - 3
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
C & = & (-x+5)(5-y) \\
C & = & (-x) \times 5 + (-x) \times (-y) + 5 \times 5 + 5 \times (-y) \\
C & = & -5x + xy + 25 - 5y
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
D & = & (3x-7)^2 \\
D & = & (3x-7) \times (3x-7) \\
D & = & 3x \times 3x + 3x \times (-7) + (-7) \times 3x + (-7) \times (-7) \\
D & = & 9x^2 - 42x + 49
\end{array}$$

II Démontrer que deux programmes de calcul donnent le même résultat quelque soit le nombre choisi

Voici deux programmes de calcul. Montrer que pour n'importe quel nombre choisi au départ, les résultats des deux programmes sont égaux.

Programme A :
Choisir un nombre
Ajouter 2
Multiplier le résultat par le nombre choisi
Ajouter 1

Programme B :
Choisir un nombre
Ajouter 1
Élever au carré

Soit x le nombre de départ

Solution :

Programme A :

- x
- $x+2$
- $(x+2)\times x = x\times x + 2\times x = x^2+2x$
- x^2+2x+1

Programme B :

- x
- $x+1$
- $(x+1)^2 = x^2+2x+1$

Donc les deux programmes donnent les mêmes expressions littérales pour n'importe quel nombre x, leurs résultats seront donc toujours égaux.

III Utilisation du calcul littéral pour montrer une propriété

Egalité
Deux expressions littérales sont égales si elles sont toujours égales, c'est-à-dire qu'elles sont égales pour n'importe quelles valeurs attribuées aux lettres de l'expression

Conséquence : le contre-exemple
Pour prouver qu'une égalité est fausse, il suffit de trouver un exemple qui donne des résultats différents pour les deux membres.

Exemple 2. Est-ce que $(a+b)^2 = a^2+b^2$ est vraie quelque soit a et b ?

Solution : On peut choisir $a=1$ et $b=2$, on a

$$\begin{cases} (a+b)^2 = (1+2)^2 = 3^2 = 9 \\ a^2+b^2 = 1^2+2^2 = 1+4 = 5 \end{cases}$$

Donc $(a+b)^2$ n'est pas égale à a^2+b^2