

Chapitre 20 : Équations

I Définition et rappels

Équation

Définition 1. Une équation à une inconnue est une égalité dans laquelle un nombre inconnu est désigné par une lettre.

Solution

Définition 2. Une solution d'une équation est une valeur de l'inconnue pour laquelle l'égalité est vraie.

Résoudre

Définition 3. Résoudre une équation, c'est trouver toutes les solutions de l'équation.

Exemple 1. Le nombre 2 est-il solution de l'équation $10x - 7 = 5x + 3$?

Solution :

$$\begin{cases} 10x - 7 = 10 \times 2 - 7 = 13 \\ 5x + 3 = 5 \times 2 + 3 = 13 \end{cases}$$

On obtient le même résultat, donc 2 est solution de l'équation $10x - 7 = 5x + 3$

Remarque. Vérifier qu'un nombre est solution d'une équation revient à tester si l'égalité est vraie pour le nombre choisi (chapitre 6).

II Résoudre une équation

Propriété 1.

(P1) Une égalité reste vraie si *on ajoute ou on soustrait un même nombre* à ses deux membres.

(P2) Une égalité reste vraie si *on multiplie ou on divise ses deux membres par un même nombre*.

Exemple 2. Exemples avec du calcul littéral

1. P1

$$\text{Si } a = b \text{ alors } a + c = b + c \text{ et } a - c = b - c$$

2. P2

$$\text{Si } a = b \text{ alors } a \times c = b \times c \text{ et } \frac{a}{c} = \frac{b}{c} \text{ avec } c \neq 0$$

Méthodologie

Il faut « isoler » x dans le membre de gauche, c'est-à-dire que le terme de la famille des x doit se retrouver à gauche tout seul, et les constantes doivent se retrouver à droite. Puis il faut obtenir le résultat pour 1 unité de x .

A Équations simples

Exemple 3. Résoudre les équations suivantes

$$x - 2 = -15$$

$$6 + x = 123$$

$$\frac{x}{4} = -6$$

$$3x = 8$$

Indice :

- pour les deux premières, aux deux membres, on va ajouter les opposés respectifs des constantes présentes dans le membre de gauche
- pour les deux dernières, il faut obtenir $x = \dots$ donc on divise ou on multiplie les deux membres par le nombre qui permet de revenir à l'unité pour x .

Solution :

$$\begin{aligned}x - 2 &= -15 \\x - 2 + 2 &= -15 + 2 \\x &= -13\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}6 + x &= 123 \\6 - 6 + x &= 123 - 6 \\x &= 117\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{x}{4} &= -6 \\\frac{x}{4} \times 4 &= -6 \times 4 \\x &= -24\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3x &= 8 \\\frac{3x}{3} &= \frac{8}{3} \\x &= \frac{8}{3}\end{aligned}$$

Pour la troisième équation, pour revenir à l'unité, on peut aussi diviser par $\frac{1}{4}$.

$$\begin{aligned}\frac{x}{4} &= -6 \\\frac{1}{4} \times x &= -6 \\\left(\frac{1}{4} \times x\right) \div \frac{1}{4} &= -6 \div \frac{1}{4} \\x &= -6 \times 4 \\x &= -24\end{aligned}$$

Remarque. Lorsque le résultat est une valeur approchée, on garde la valeur exacte grâce à l'écriture fractionnaire.

B Équations du type $ax + b = c$

Méthode : aux deux membres, on prend l'opposé de la constante du membre de gauche puis on réduit de façon à isoler x dans le membre de gauche.

Exemple 4. Résoudre les équations suivantes

$$3x + 4 = 13$$

$$-6x - 1 = 20$$

Solution :

$$\begin{aligned}3x + 4 &= 13 \\3x + 4 - 4 &= 13 - 4 \\3x &= 9 \\ \frac{3x}{3} &= \frac{9}{3} \\x &= 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-6x - 1 &= 20 \\-6x - 1 + 1 &= 20 + 1 \\-6x &= 21 \\ \frac{-6x}{-6} &= \frac{21}{-6} \\x &= -\frac{7}{2}\end{aligned}$$

C Équations du type $ax + b = cx + d$

Méthode : Aux deux membres, on prend l'opposé de la constante du membre de gauche puis on réduit ; aux deux membres, on prend l'opposé du terme en x du membre de droite et on réduit pour se ramener à une équation de la forme $ax = b$, puis on divise les deux membres par le coefficient a .

Exemple 5. Résoudre les équations suivantes

$$12x - 9 = 2x + 11$$

$$-9x + 1 = -8x - 5$$

Solution :

$$\begin{aligned}12x - 9 &= 2x + 11 \\12x - 9 + 9 &= 2x + 11 + 9 \\12x &= 2x + 20 \\12x - 2x &= 2x - 2x + 20 \\10x &= 20 \\ \frac{10x}{10} &= \frac{20}{10} \\x &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-9x + 1 &= -8x - 5 \\-9x - 1 - 1 &= -8x - 5 - 1 \\-9x &= -8x - 6 \\-9x + 8x &= -8x - 5 + 8x \\-x &= -6 \\ \frac{-x}{-1} &= \frac{-6}{-1} \\x &= 6\end{aligned}$$

⚠ Attention il est obligatoire de vérifier que le résultat trouver est solution de l'équation. On va donc tester le résultat.

Pour $x = 2$

$$\begin{cases} 12x - 9 = 12 \times 2 - 9 = 15 \\ 2x + 11 = 2 \times 2 + 11 = 15 \end{cases}$$

On trouve le même résultat donc $x = 2$ est solution de l'équation $12x - 9 = 2x + 11$

Pour $x = 6$

$$\begin{cases} -9x + 1 = -9 \times 6 + 1 = -54 + 1 = -53 \\ -8x - 5 = -8 \times 6 - 5 = -48 - 5 = -53 \end{cases}$$

On trouve le même résultat donc $x = 6$ est solution de l'équation $-9x + 1 = -8x - 5$

Explication (Ne pas noter)

Première équation

1. On a -9 dans le membre de gauche or on veut garder que des termes en x . Pour éliminer -9 , on prend son opposé, soit $+9$. On ajoute $+9$ dans les deux membres
2. on réduit, il reste $12x$ à gauche et $2x + 20$ à droite
3. on veut que la famille des x soit rassemblée à gauche, il faut donc éliminer $2x$ dans le membre de droite, pour cela prenons son opposé $-2x$ et ajoutons le aux deux termes.
4. on réduit, il reste $10x = 20$
5. on veut avoir l'unité pour x donc on divise les deux membres par le coefficient de x qui est 10 .

Seconde équation

1. On a +1 dans le membre de gauche or on veut garder que des termes en x . Pour éliminer +1, on prend son opposé, soit -1 et on l'ajoute aux deux membres
2. on réduit, il reste $-9x = -8x - 6$
3. on veut que la famille des x se retrouve dans le membre de gauche, pour cela il faut éliminer $-8x$ à droite, on prend donc son opposé $+8x$ que l'on ajoute aux deux membres
4. on réduit, il reste $-x = -6$
5. on se rappelle que l'on veut $x = \dots$ donc on divise les deux membres par le coefficient de x qui est -1

D Egalité des produits en croix

Dans certains équations, on peut utiliser l'égalité des produits en croix. Dans ce cas, on n'oublie pas de mettre des parenthèses autour des différents termes.

Exemple 6. Résoudre les équations suivantes

$$\frac{x}{3} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{-6}{7} = \frac{81}{x}$$

$$\frac{35}{100} = \frac{-x}{20}$$

$$\frac{12}{x+1} = 2$$

Solution :

$$\begin{aligned} \frac{x}{3} &= \frac{4}{5} \\ x &= \frac{3 \times 4}{5} \\ x &= \frac{12}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{35}{100} &= \frac{-x}{20} \\ -x &= \frac{35 \times 20}{100} \\ -x &= 7 \\ \frac{(-x)}{-1} &= \frac{7}{-1} \\ x &= -7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{-6}{7} &= \frac{81}{x} \\ x &= \frac{7 \times 81}{-6} \\ x &= -\frac{567}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{12}{x+1} &= 2 \\ \frac{12}{x+1} &= \frac{2}{1} \\ 2 \times (x+1) &= 12 \times 1 \\ \frac{2(x+1)}{2} &= \frac{12}{2} \\ x+1 &= 6 \\ x+1-1 &= 6-1 \\ x &= 5 \end{aligned}$$



Danger

Ne pas oublier de vérifier si le nombre trouvé est bien solution de l'équation