Chapitre 19 : Caractéristiques de position

On étudie ici des séries statistiques en cherchant à les « résumer » grâce à des nombres, les caractéristiques de position.

I La moyenne

Définition 1. La moyenne d'une série de valeurs se calcule en additionnant toutes les valeurs puis en divisant par l'effectif total de la série :

$$\boxed{M = \frac{\text{somme des données}}{\text{effectif total}}}$$

Interprétation : la moyenne est le nombre que prendrait chaque valeur de la série pour qu'elles soient toutes identiques.

A Lorsque la série est donnée sous forme de liste

Exemple 1. Moyenne simple
Voici les notes sur 20 de Claire en mathématiques : 12,5 - 11,5 - 8 - 17 - 10 - 15 - 20 - 10.

Calculer sa moyenne, en l'arrondissant à l'unité et interpréter le résultat.

Solution : Effectif total 8 (8 notes)

Moyenne : $m = (12,5+11,5+8+17+10+15+20+10) \div 8 = 104 \div 8 = 13$

Interprétation : Si Claire était régulière dans ses résultats, elle aurait 13/20 à chaque devoir.

B Lorsque la série est donnée sous forme de tableau

Méthode :

Valeurs	Valeur 1	Valeur 2	...	Dernière valeur	
Effectifs	Effectif 1	Effectif 2	...	Dernier effectif	EFFECTIF TOTAL = effectif 1 + effectif 2 + ... + dernier effectif

$$\boxed{moyenne = \frac{valeur\ 1 \times effectif\ 1 + valeur\ 2 \times effectif\ 2 + \cdots + dernière\ valeur \times dernier\ effectif}{effectif\ Total}}$$

Exemple 2.
On a demandé aux élèves leur nombre de frères et soeurs. Calculer le nombre de frères et soeurs moyen

Nombre de frères et soeurs	0	1	2	3	4
Effectif	5	6	4	3	2

Solution :
L'effectif total est de $5+6+4+3+2=20$

$$m = \frac{0\times 5+1\times 6+2\times 4+3\times 3+4\times 2}{20} = 1,55$$

En moyenne, ces élèves ont 1,55 frères et soeurs

Exemple 3. Voici les notes de Clément (sur 20) en Mathématiques ce semestre. Les DM sont coefficientés 1, les tests 2 et les DST 3.

DM : 18 - 12 - 3 Test : 17 - 11 - 10 DS : 13

Calculer sa moyenne en mathématiques, arrondir au centième.

Solution :

Notes	18	12	3	17	11	10	13	TOTAL
Coefficient	1	1	1	2	2	2	3	12

$$m = \frac{18\times 1+12\times 1+3\times 1+17\times 2+11\times 2+10\times 2+13\times 3}{1+1+1+2+2+2+3} = \frac{148}{12} \approx 12,33$$

La moyenne de Clément est d'environ 12,33.

II Étendue

Étendue

Définition 2. L'étendue d'une série statistique est l'écart entre la plus grande et la plus petite valeur de la série.

$$e = \text{Valeur Max} - \text{Valeur Min}$$

Interprétation : Plus l'étendue est grande, plus les données de la série sont **dispersées** .

Exemple 4. Voici les prix en euros de onze bracelets exposés en bijouterie :

99 - 37 - 42 - 20 - 109 - 269 - 99

Calculer l'étendue de cette série statistique et interpréter le résultat.

Solution :

Le plus grand prix est de 269€ Le plus petit prix est de 20€

$e = 269 - 20 = 249$

Interprétation : : les valeurs sont très dispersées.

III La médiane

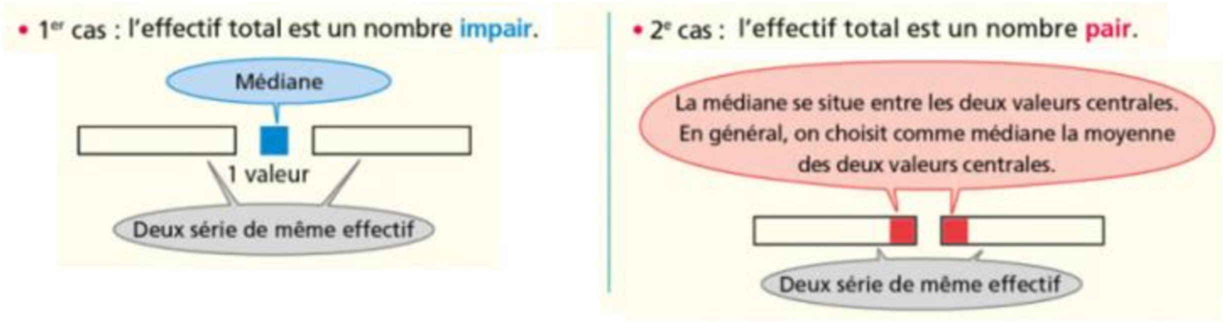
A Médiane d'une série sous forme de liste

Médiane

Définition 3. Une médiane d'une série est la valeur qui partage cette série en deux série de même effectif telle qu'au moins la moitié des valeurs de la série soient inférieures ou égales à la médiane.

Méthode

On commence par ranger les valeurs dans l'ordre croissant.



Exemple 5. Voici les notes sur 20 obtenues au premier et deuxième trimestre par un élève. Calculer la médiane et interpréter le résultat.

Premier trimestre (Nombre impair de notes)	**Deuxième trimestre** (Nombre pair de notes)
13, 7, 11, 15, 14, 15, 6, 10, 8, 16, 15	15, 6, 11, 12, 7, 15, 13, 8, 12, 8

Solution : **On commence toujours par trier par ordre croissant la série.**

Premier trimestre

Il y a 11 données (impair) :

$\underbrace{6; 7; 8; 10; 11;}_{\text{5 valeurs}} \boxed{13}; \underbrace{14; 15; 15; 15; 16.}_{\text{5 valeurs}}$

médiane

$\frac{11}{2} = 5,5$ donc la médiane est la valeur de la 6^e données de la série **triée**

$$Me = 13$$

Interprétation : au premier trimestre, l'élève a eu autant de notes en dessous de 13/20 que de notes au-dessus de 13/20

Deuxième trimestre

Il y a 10 données (pair)

$\underbrace{6; 7; 8; 8; 11}_{\text{5 valeurs}}; \underbrace{12; 12; 13; 15; 15.}_{\text{5 valeurs}}$

la médiane est la moyenne des deux valeurs centrales 11 et 12

$\frac{10}{2} = 5$ donc la médiane est la moyenne entre la valeur de la 5^e donnée (11) et la valeur de la 6^e donnée (12) de la série triée

$$Me = \frac{11+12}{2} = 11,5$$

Interprétation : au deuxième trimestre, l'élève a eu autant de notes en dessous de 11,5 que de notes au dessus de 11,5

Exemple 6. Voici le prix en euros de onze bracelets disposés dans une boutique.

99 ; 37 ; 42 ; 56 ; 49 ; 88 ; 105 ; 79 ; 109 ; 269 ; 99

1. Calculer le prix median puis interpréter le résultat
2. Si on ajoute un bracelet à 22 € à la série précédente, quelle est la nouvelle médiane ?

Solution :

1. Il y a onze valeurs à ranger dans l'ordre croissant

   37 ; 42 ; 49 ; 56 ; 79 ; 88 ; 99 ; 99 ; 105 ; 109 ; 269

   Il y a un effectif impair (11 données)

   Position de la médiane : $\frac{11}{2} = 5,5$, donc la médiane est la valeur de la 6^e donnée, soit 88.

   Le prix médian est donc de 88 €.

Interprétation : Dans la bijouterie, il y a autant de bracelets qui coûtent moins de 88 € que de bracelets qui coûtent plus de 88 €.

2. Il y a maintenant 12 données à ranger dans l'ordre croissant :

   22 ; 37 ; 42 ; 49 ; 56 ; 79 ; 88 ; 99 ; 99 ; 105 ; 109 ; 269

   C'est un effectif pair.

   Position de la médiane : $\frac{12}{2} = 6$, donc la médiane est comprise entre la valeur de la 6^e donnée (79) et la valeur de la 7^e donnée (88), on va prendre la moyenne entre ces deux valeurs, soit $\frac{79+88}{2} = 83,5$

   Le prix median est maintenant de 83,50 €.

B Médiane d'une série sous forme de tableau

Méthode : On commence par compléter le tableau avec la ligne des effectifs cumulés croissants (ECC).

C'est-dire que l'on calcule la somme des tous les effectifs qui ont une valeur **inférieure ou égale** à celle cherchée.

Exemple 7. On demande à 18 élèves : « combien de temps travaillez-vous chaque soir ? 15 min, 30 min, 45 min ou 60 min ».
Voici leurs réponses : 60 ; 30 ; 45 ; 15 ; 15 ; 15 ; 30 ; 30 ; 60 ; 60 ; 60 ; 15 ; 45 ; 45 ; 60 ; 30 ; 45 ; 30.

1. Classer par ordre croissant cette série
2. Compléter le tableau suivant

Temps (en min)	15	30	40	60	TOTAL
Effectifs					
ECC					

3. Calculer la médiane de cette série statistique

Solution :

1. 15 ; 15 ; 15 ; 15 ; 30 ; 30 ; 30 ; 30 ; 30 ; 45 ; 45 ; 45 ; 45 ; 60 ; 60 ; 60 ; 60 ; 60
2.

1^e, 2^e, 3^e, 4^e valeurs — 5^e, 6^e, 7^e, 8^e, 9^e valeurs — 10^e, 11^e, 12^e, 13^e valeurs — 14^e, 15^e, 16^e, 17^e, 18^e valeurs

Temps (en min)	15	30	45	60	Total
Effectifs	4	5	4	5	18
ECC	4	9	13	18	

3. Il y a 18 valeurs (pair).

   Position de la médiane : $\frac{18}{2} = 9$ donc la médiane est comprise entre la 9^e et la 10^e données, soit entre la valeur 30 et la valeur 45.

   On peut calculer la moyenne des deux valeurs pour obtenir la médiane, $Me = \frac{30+45}{2} = 37,5$.

   La médiane de la série est de 37,5 min.

IV Tableur

A faire

— Moyenne sous forme de liste "=MOYENNE()"

— Moyenne pondérée -> "=B1*B2" puis "=SOMME" divisé par une valeur

— Médiane "=MEDIANE"