Chapitre 14 : Théorème de Pythagore

Le théorème de Pythagore ne s'applique que dans un **triangle rectangle**.

Rappel de vocabulaire : dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est le côté opposé à l'angle droit.

I Activité

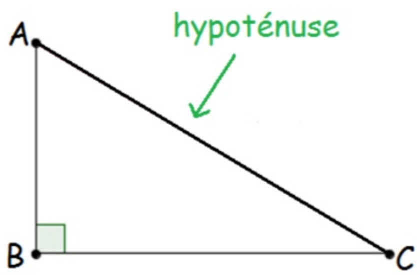
? Ne pas écrire
Découverte de l'égalité de Pythagore avec le puzzle

II Théorème de Pythagore

Théorème 1. Théorème de Pythagore
Si un triangle est rectangle alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs de ses deux autres côtés.

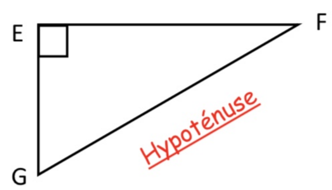
Autrement dit

Si ABC est un triangle rectangle en B **alors** $\boxed{AC^2 = AB^2 + BC^2}$



Exemple 1.
On considère le triangle EFG rectangle en E. Quelle égalité a-t-on d'après le théorème de Pythagore ?
Solution : Je sais que EFG est un triangle rectangle en E.

D'après le théorème de Pythagore, $FG^2 = EG^2 + EF^2$



Conséquence Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est le plus grand des trois côtés.

III Carrés parfaits et racines carrées

A Activité

? Ne pas écrire
Découverte de la nécessité d'introduire la notion de racine carrée à partir de l'estimation de la longueur d'un côté du carré avec son aire

Racine carrée

Définition 1. Soit a un nombre positif , $\sqrt{a}$ (« racine carrée de a ») est le nombre positif qui donne a lorsqu'on l'élève au carré : $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

Remarque. Le symbole $\sqrt{.}$ s'appelle le radical.

? Ne pas écrire

Le symbole radical est apparu la première fois en 1525 dans la matrice Coss par Christoff Rudolff (1499-1545). Il a employé $\surd$ pour les racines carrées.Certains avancent que l'origine du symbole radical moderne vient d'une déformation de R, puis r, la première lettre dans la radix (racine en latin). Progressivement, on a soudé la « barre » au signe.

Exemple 2. $3^2 = 9$
On cherche maintenant $\sqrt{9}$. D'après la définition $\sqrt{9} \times \sqrt{9} = 9$ et on sait que $3 \times 3 = 9$. Par identification, on a $\sqrt{9} = 3$.

On appelle carré parfait, un nombre entier positif dont la racine carrée est un nombre entier.

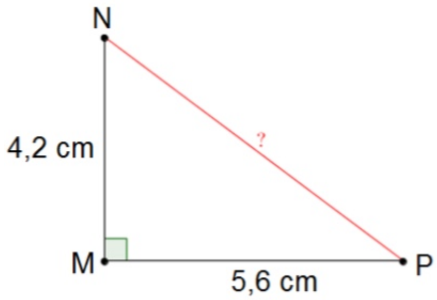
carré : $a^2 = a \times a$	$0^2 = 0$	$1^2 = 1$	$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$4^2 = 16$	$5^2 = 25$	$6^2 = 36$	$7^2 = 49$
racine carrée $\sqrt{a}$	$\sqrt{0} = 0$	$\sqrt{1} = 1$	$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{16} = 4$	$\sqrt{25} = 5$	$\sqrt{36} = 6$	$\sqrt{49} = 7$

carré : $a^2 = a \times a$	$8^2 = 64$	$9^2 = 81$	$10^2 = 100$	$11^2 = 121$	$12^2 = 144$
racine carrée $\sqrt{a}$	$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{81} = 9$	$\sqrt{100} = 10$	$\sqrt{121} = 11$	$\sqrt{144} = 12$

Propriétés sur les racines carrées	Exemples
Sous le symbole $\sqrt{\ }$ il y a toujours un nombre positif	$\sqrt{3}$ existe $\sqrt{-3}$ n'existe pas !
Le résultat d'une racine carrée est un nombre positif	$\sqrt{3} \approx 1{,}73 > 0$
Pour trouver le nombre positif x tel que $x^2 = a$, ↓ on calcule la racine carrée de a : $x = \sqrt{a}$	1) Le nombre positif x tel que $x^2 = 25$ est : $x = \sqrt{25} = 5$ 2) Le nombre positif x tel que $x^2 = 81$ est : $x = \sqrt{81} = 9$ 3) Le nombre positif x tel que $x^2 = 20$ est : $x = \sqrt{20} \approx 4{,}5$ 4) Le nombre positif x tel que $x^2 = 6{,}7$ est : $x = \sqrt{6{,}7} \approx 2{,}6$

IV Applications au théorème de Pythagore

A Calcul de la longueur de l'hypoténuse



On considère un triangle rectangle en M tel que MN = 4.2 cm et MP = 5.6 cm. Calculer NP

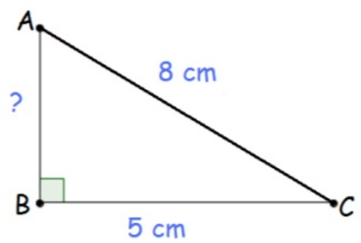
<u>Solution :</u> Je sais que MNP est un triangle rectangle en M

Or, d'après le théorème de Pythagore, $NP^2 = MN^2 + MP^2$
donc en remplaçant par les valeurs numériques

$$\begin{array}{rcl} NP^2 & = & 4.2^2 + 5.6^2 \\ NP^2 & = & 17.64 + 31.36 \\ NP^2 & = & 49 \\ NP > 0 & \text{car NP est une longueur} & \\ NP & = & \sqrt{49} = 7 \end{array}$$

NP mesure 7 cm

B Calculer la longueur d'un côté de l'angle droit



On considère un triangle ABC rectangle en B tel que AC = 8 cm et BC = 5 cm. Calculer AB et arrondir au mm.

<u>Solution :</u> Je sais que le triangle ABC est rectangle en B,

or d'après le théorème de Pythagore
$AC^2 = AB^2 + BC^2$
En remplaçant avec les données

$$\begin{array}{rcl} 8^2 & = & AB^2 + 5^2 \\ 64 & = & AB^2 + 25 \\ AB^2 & = & 64 - 25 \\ AB^2 & = & 39 \end{array}$$

AB>0 car AB est une longueur
$AB = \sqrt{39}$ cm (**<u>valeur exacte</u>**)
$AB \approx 6,2$ cm (**<u>valeur approchée</u>**)

Remarque. Le théorème de Pythagore sert à calculer la longueur du troisième côté quand on connaît les deux autres <u>dans un triangle rectangle</u>