

# Chapitre 13 : Arithmétique

Dans ce chapitre, on travaille uniquement avec des **nombre entiers**.

## I Multiples et diviseurs

### A Vocabulaire



#### Division euclidienne

**Définition 1.** Soient  $a$  et  $b$  deux nombres entiers positifs avec  $b \neq 0$ . Effectuer la division euclidienne de  $a$  par  $b$ , c'est déterminer les deux nombres entiers positifs  $q$  et  $r$  tels que

$$a = b \times q + r \text{ et } 0 \leq r < b$$



#### Diviseur / Multiple

**Définition 2.** On considère  $a$  et  $b$  deux nombres entiers avec  $b$  non nul ( $b \neq 0$ ). On dit que  $a$  est un multiple de  $b$  ou que  $b$  est un diviseur de  $a$  si le reste de la division euclidienne de  $a$  par  $b$  vaut 0.

Exemple 1.

$$60 = 6 \times 10.$$

Nombres entiers

On dit que

- 6 et 10 et sont des diviseurs de 60
- 6 et 10 divisent 60
- 60 est un multiple de 6 et 10
- 60 est divisible par 6 et 10

*Remarque.* Un diviseur d'un nombre est inférieur ou égal au nombre.  
Donner un exemple : multiple de 21 par exemple.

#### ? Ne pas écrire

Un multiple d'un nombre est soit 0, soit égal au nombre, soit supérieur au nombre

## B Méthode pour savoir si un nombre est multiple ou diviseur d'un autre nombre

Exemple 2.

1. 12 est-il un diviseur de 84?

**Solution :**  $84 = 12 \times 7 + 0$ , le reste de la division euclidienne est nul donc 12 est un diviseur de 84 et 7 un autre diviseur

2. 15 est-il un diviseur de 55?

**Solution :**  $55 = 15 \times 3 + 10$ , le reste de la division euclidienne n'est pas nul donc 15 n'est pas un diviseur de 55

3. 130 est-il un multiple de 26?

**Solution :**  $130 = 26 \times 5$ , donc 130 est un multiple de 26 et aussi un multiple de 5

## C Trouver tous les diviseurs d'un nombre

### Exemple 3.

Trouver tous les diviseurs de 24

#### Solution :

$$\begin{aligned} 24 &= 1 \times 24 \\ &= 2 \times 12 \\ &= 3 \times 8 \\ &= 4 \times 6 \end{aligned}$$

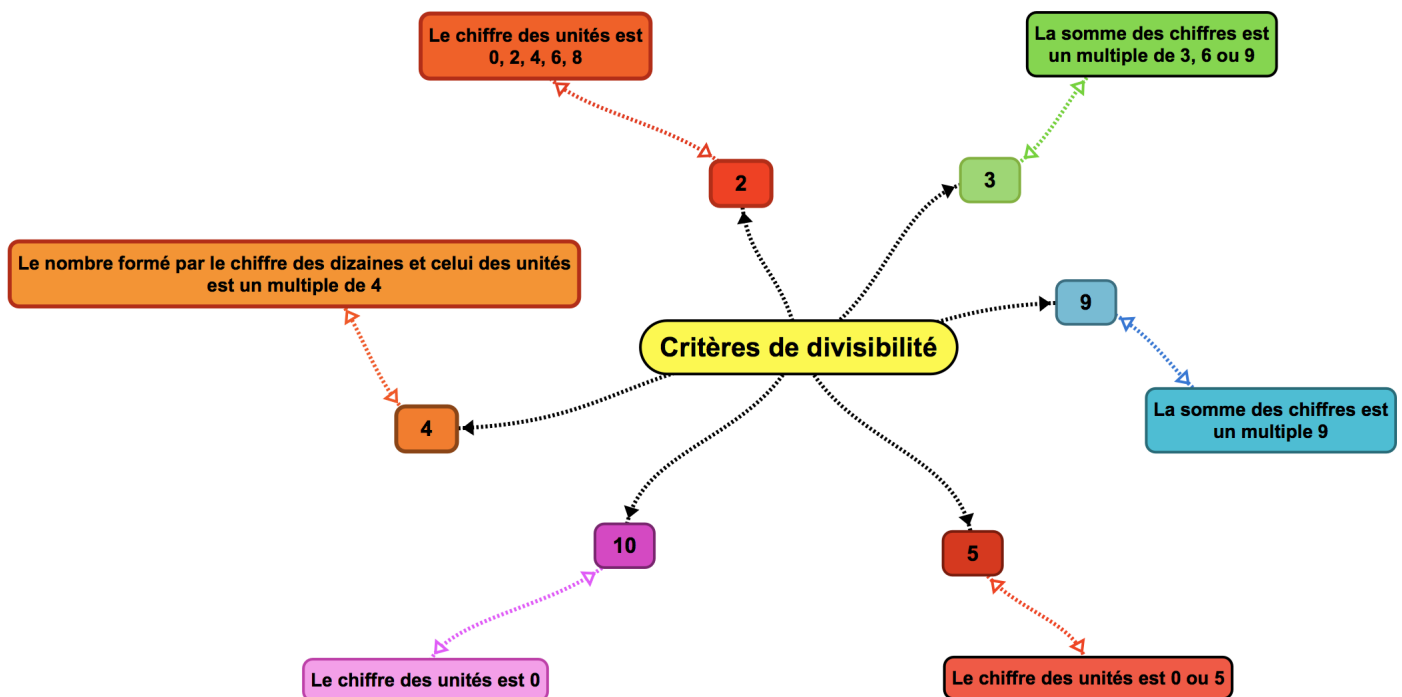
Les diviseurs de 24 sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 et 24

Donner tous les diviseurs de 17

#### Solution : $17 = 1 \times 17$

Les diviseurs de 17 sont 1 et 17

## D Critères de divisibilité



## II Nombres premiers



### Nombres premiers

**Définition 3.** Un nombre premier est un nombre entier positif qui admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

**Exemple 4.** 1. 19 est-il un nombre premier?

2. 8 est-il un nombre premier?

**Solution :**  $19 = 19 \times 1$ , Le nombre 19 n'a que deux diviseurs : 1 et 19, donc 19 est un nombre premier  
 $8 = 1 \times 8 = 2 \times 4$ , les diviseurs de 8 sont 1, 2, 4, 8, donc 8 n'est pas un nombre premier

## ♥ Nombres premiers inférieurs à 30

2 - 3 - 5 - 7 - 11 - 13 - 17 - 19 - 23 - 29

**Propriété 1.** Quelques propriétés à savoir

- 0 n'est pas premier (infinité de diviseurs)
- 1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur
- 2 est le seul nombre premier pair
- il y a une infinité de nombres premiers

## A Décomposition

**Propriété 2.** Un nombre entier supérieur ou égal à 2 se décompose en produit de facteurs premiers. Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

### 🔧 Méthodologie

On divise le nombre par un nombre premier (le plus petit), puis le résultat obtenu par un nombre premier, et ainsi de suite jusqu'à obtenir 1. On trouve la décomposition à partir de la liste des diviseurs premiers utilisés.

**Exemple 5.** Décomposition

Le nombre 84

$$84 \div 2 = 42$$

$$42 \div 2 = 21$$

$$21 \div 3 = 7$$

$$7 \div 7 = 1$$

$$\text{donc } 84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7$$

Le nombre 135

$$135 \div 3 = 45$$

$$45 \div 3 = 15$$

$$15 \div 3 = 5$$

$$5 \div 5 = 1$$

$$\text{donc } 135 = 3 \times 3 \times 3 \times 5$$

Pour vérifier à l'aide d'une calculatrice CASIO, on utilise la commande « DECOMP ».

Pour cela, il suffit de taper le nombre puis **EXE** **SECONDE** **(←)**

Par exemple, pour décomposer 300, on tape **3****0****0** **EXE** **SECONDE** **(←)**, on obtient :  $2^2 \times 3 \times 5^2$

## B Simplification

### 🔧 Méthodologie

Pour simplifier une fraction, on décompose son numérateur et son dénominateur en un produit de facteurs premiers puis on simplifie cette fraction par tous les facteurs communs

**Exemple 6.** Simplifier la fraction  $\frac{204}{72}$

**Solution :**

$$204 \div 2 = 102$$

$$102 \div 2 = 51$$

$$51 \div 3 = 17$$

$$17 \div 17 = 1$$

$$\text{donc } 204 = 2 \times 2 \times 3 \times 17$$

$$72 \div 2 = 36$$

$$36 \div 2 = 18$$

$$18 \div 2 = 9$$

$$9 \div 3 = 3$$

$$3 \div 3 = 1$$

$$\text{donc } 72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

$$\text{Donc } \frac{204}{72} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{3} \times 17}{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{3} \times 3} = \frac{17}{2 \times 3} = \frac{17}{6}$$