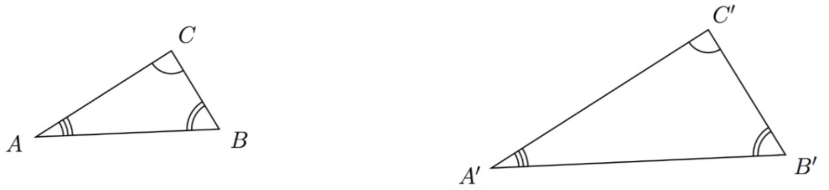
Chapitre 10 : Triangles semblables

I Qu'est-ce que deux triangles semblables

Triangles semblables

Définition 1. Des triangles sont **semblables** si leurs angles sont respectivement de la même mesure.

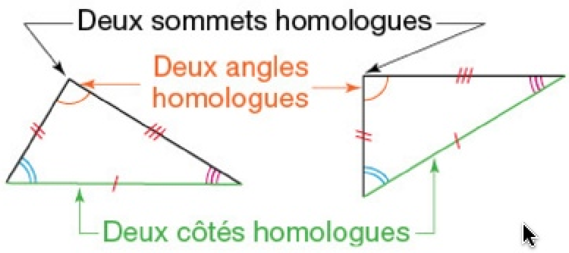
Exemple 1.



Solution : Comme $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$, $\widehat{BCA} = \widehat{B'C'A'}$ et $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$ alors les deux triangles sont semblables.

Remarque. Pour que deux triangles soient semblables, il suffit que deux angles de l'un des triangles soient égaux à deux angles de l'autre triangle, puisque la somme des angles d'un triangle est égale à 180°.

Vocabulaire **Si deux triangles sont semblables** alors

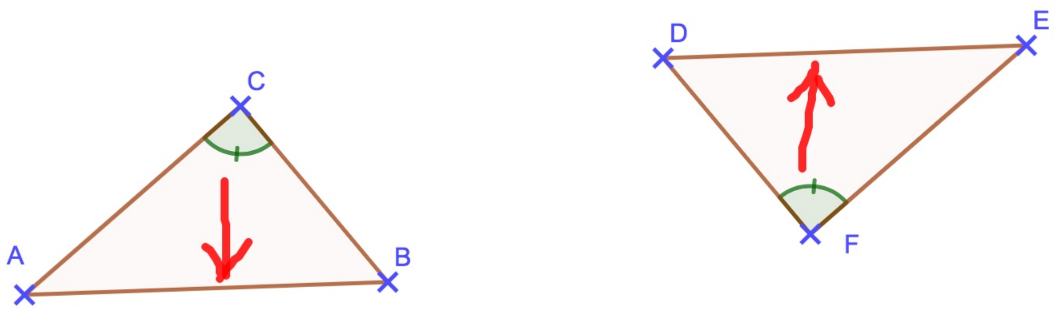


Dans l'exemple précédent, $\widehat{CBA} = \widehat{EDF}$, les angles sont dits **homologues**.

les côtés opposés à deux angles homologues sont homologues.

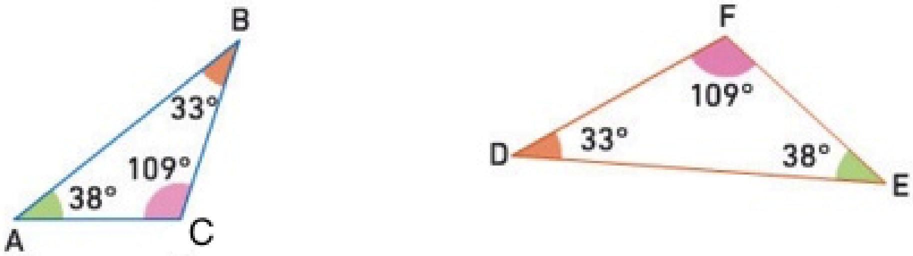
Comment repérer deux côtés homologues s'ils n'ont pas de codage ?
On part d'un angle homologue et on regarde le côté opposé

Sommets homologues : $\widehat{ACB}$ et $\widehat{DFE}$



Côtés homologues [AB] et [DE]

Exemple 2. Les triangles ABC et FDE sont-ils semblables ?



Pour ne pas se tromper, on remplit le tableau ci-dessous :

Sommets homologues	Côtés homologues
A et E	[BC] et [FD]
B et D	[AC] et [EF]
C et F	[AB] et [ED]

Danger

Homologue ne veut pas dire égale, cela signifie **correspondant**

.

Propriété 1. ***Si*** *deux triangles sont semblables,* ***alors*** *les longueurs des côtés homologues sont proportionnelles.*

Ne pas écrire

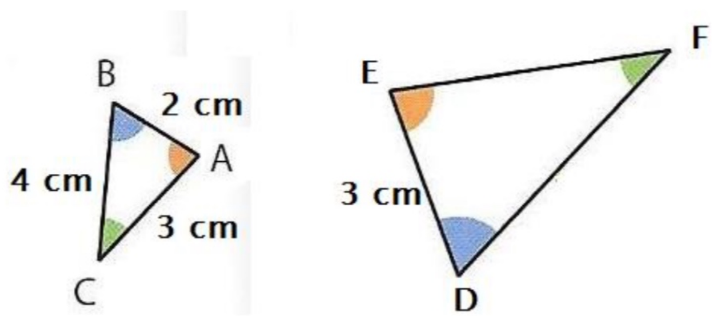
Si deux triangles ABC et A'B'C' sont semblables, **alors** leurs côtés respectifs sont proportionnels

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k$$

où k est le coefficient de proportionnalité.

Vocabulaire : il s'agit d'un agrandissement ou d'une réduction.
Le coefficient de proportionnalité est aussi appelé coefficient d'agrandissement ou de réduction.

Exemple 3. Déterminer EF et DF.



Solution :

$\widehat{CBA} = \widehat{EDF}$, $\widehat{BCA} = \widehat{DFE}$ et $\widehat{BAC} = \widehat{DEF}$

Donc les triangles ABC et DEF sont semblables.

Recherche des côtés homologues par rapport aux angles.

Triangle ABC	AC	AB	BC
Triangle EDF	EF	ED	FD

On a

$$\frac{EF}{AC} = \frac{ED}{AB} = \frac{FD}{BC}$$

Donc

$$\frac{EF}{3} = \frac{3}{2} = \frac{FD}{4}$$

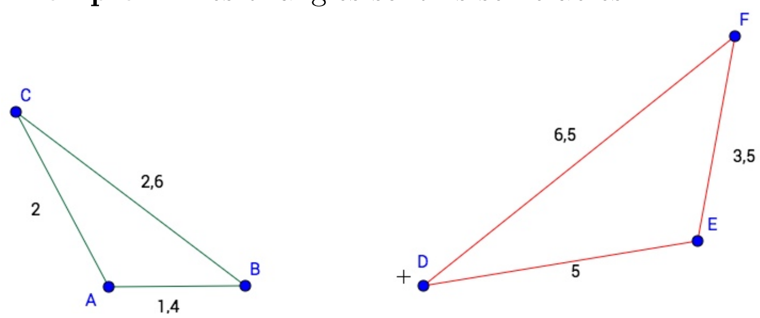
A l'aide de l'égalité des produits en croix, on a :
$\dfrac{EF}{3} = \dfrac{3}{2}$ donc $EF = \dfrac{3 \times 3}{2} = 4,5$ cm $\qquad \dfrac{2}{3} = \dfrac{FD}{4}$ donc $FD = \dfrac{3 \times 4}{2} = 6$ cm

ABC est une réduction de DEF de coefficient $\dfrac{2}{3}$ ou DEF est un agrandissement de ABC de coefficient $\dfrac{3}{2}$

II Démontrer que deux triangles sont semblables

Propriété 2. ***Si*** *deux triangles ont les longueurs de leurs côtés respectifs proportionnelles,* ***alors*** *ces triangles sont semblables.*

Exemple 4. Les triangles sont-ils semblables ?



Solution :
Idée : classer les longueurs par ordre croissant.

	1,4	2	2,6
Triangle ABC	AB	AC	BC
Triangle EDF	EF	DE	FD
	3,5	5	6,5

Prouvons que le tableau est un tableau de proportionnalité.

$\dfrac{AB}{EF} = \dfrac{1,4}{3,5} = 0,4\,;\ \dfrac{AC}{DE} = \dfrac{2}{5} = 0,4\,;\ \dfrac{BC}{DF} = \dfrac{2,6}{6,5} = 0,4\,;$

Les quotients sont égaux donc les longueurs de ABC sont donc proportionnelles aux longueurs de DEF.
Or si deux triangles ont les longueurs de leurs côtés respectifs proportionnelles, alors ces triangle sont semblables.

Donc les triangles ABC et DEF sont semblables.

Méthodologie
Pour prouver que deux triangles sont semblables avec des longueurs, on commence par ranger par ordre croissant les longueurs des deux triangles pour former des paires et calculer si l'on trouve un coefficient de proportionnalité.