

Chapitre 5 : Nombres rationnels

I Définitions

A Définition

Fraction

Définition 1. Soient a et b deux nombres relatifs ($b \neq 0$). Le quotient de a par b est le nombre qui, multiplié par b , donne a .

$$\frac{a}{b} \times b = a$$

On le note $a \div b$ ou, en écriture fractionnaire $\frac{a}{b}$.

Si a et b sont des entiers ($b \neq 0$), alors $\frac{a}{b}$ est une fraction. Cela forme les nombres rationnels.

Exemple 1. $-\frac{2}{3}$ est un nombre rationnel, 1.2 aussi car il s'écrit sous la forme $\frac{12}{10}$

B Quotients égaux

Propriété 1. *Un quotient ne change pas lorsqu'on multiplie ou on divise le numérateur ET le dénominateur par le même nombre non nul.*

Méthode : pour simplifier une fraction, on divise le numérateur et le dénominateur par le même nombre.

Définition 2. Soient a , b et k trois entiers relatifs tels que $b \neq 0$ et $k \neq 0$ alors $\frac{a}{b}$ et $\frac{a \times k}{b \times k}$ (et $\frac{a \div k}{b \div k}$) sont des quotients égaux.

A savoir

$$\begin{aligned} \checkmark \quad \frac{2}{2} &= \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \dots = 1 \\ \checkmark \quad \frac{2}{1} &= 2, \quad \frac{3}{1} = 3, \quad \frac{7}{1} = 7 \end{aligned}$$

Exemple 2. Calculer

$$\frac{20}{25} = \frac{4 \times 5}{5 \times 5} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{-48}{64} = \frac{-6 \times 8}{8 \times 8} = \frac{-6}{8}$$

$$\begin{aligned} \frac{-2300}{-4600} &= \frac{-23 \times 100}{-46 \times 100} \\ &= \frac{23}{46} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

C Égalité des produits en croix

Propriété 2. Soient a , b , c , d nombres relatifs tels que $b \neq 0$ et $d \neq 0$

Dire que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ revient à dire que $a \times d = b \times c$

Exemple 3. Déterminer si les deux quotients sont égaux avec la propriété des produits en croix

$$\frac{13}{91} \text{ et } \frac{12}{84}$$

Solution : on a $13 \times 84 = 1092$ et $91 \times 12 = 1092$.

Comme $13 \times 84 = 91 \times 12$ alors $\frac{13}{91} = \frac{12}{84}$

$$\frac{-41}{6} \text{ et } \frac{-35}{5}$$

Solution : On a $-41 \times 5 = -205$ et $6 \times (-35) =$

$$-210.$$

comme $-41 \times 5 \neq 6 \times (-35)$ donc $\frac{-41}{6} \neq \frac{-35}{5}$

D Comparer deux fractions

Pour comparer deux fractions, on transforme chacune des deux fractions en les mettant sur le même dénominateur **positif** (quotients égaux) puis on compare les numérateurs.

Exemple 4. Comparer $\frac{4}{3}$ et $\frac{9}{7}$ et $\frac{-15}{18}$ et $\frac{11}{-12}$.

Solution :

$$\frac{4}{3} = \frac{28}{21} \text{ et } \frac{9}{7} = \frac{27}{21} \text{ donc } \frac{4}{3} > \frac{9}{7}$$

$$\frac{-15}{18} = \frac{-15 \times 2}{18 \times 2} = \frac{-30}{36}$$

$$\text{et } \frac{11}{-12} = \frac{11 \times (-3)}{12 \times (-3)} = \frac{-33}{36}$$

Comme $-30 > -33$ alors $\frac{-30}{36} > \frac{-33}{36}$, donc

$$\frac{-15}{18} > \frac{11}{-12}$$

II Addition et soustraction

Propriété 3. Pour additionner (ou soustraire) deux fractions qui ont **même dénominateur**, on additionne (ou on soustrait) les numérateurs, en gardant le dénominateur commun.

Si a, b et c désignent trois nombres avec b non nul, alors

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$$

si les dénominateurs sont les mêmes	si on remarque qu'un dénominateur est un multiple de l'autre	si les dénominateurs sont différents	si on ajoute (ou on soustrait) un nombre entier et une fraction
$A = \frac{9}{16} + \frac{3}{16}$ $A = \frac{9+3}{16}$ $A = \frac{12}{16}$ <p style="color: red;">on simplifie :</p> $A = \frac{12:4}{16:4}$ <div style="border: 1px solid blue; display: inline-block; padding: 2px;">$A = \frac{3}{4}$</div>	$B = \frac{11}{3} - \frac{5}{12}$ $B = \frac{11 \times 4}{3 \times 4} - \frac{5}{12}$ $B = \frac{44}{12} - \frac{5}{12}$ $B = \frac{44-5}{12}$ $B = \frac{39}{12}$ $B = \frac{39:3}{12:3}$ <div style="border: 1px solid blue; display: inline-block; padding: 2px;">$B = \frac{13}{4}$</div>	$C = \frac{3}{10} + \frac{9}{8}$ <div style="border: 1px solid gray; padding: 5px; margin: 5px 0;"> $10 \times 1 = 10$ $10 \times 2 = 20$ $10 \times 3 = 30$ $10 \times 4 = 40$ </div> <div style="border: 1px solid gray; padding: 5px; margin: 5px 0;"> $8 \times 1 = 8$ $8 \times 2 = 16$ $8 \times 3 = 24$ $8 \times 4 = 32$ $8 \times 5 = 40$ </div> $C = \frac{3 \times 4}{10 \times 4} + \frac{9 \times 5}{8 \times 5}$ $C = \frac{12}{40} + \frac{45}{40}$ $C = \frac{12+45}{40}$ <div style="border: 1px solid blue; display: inline-block; padding: 2px;">$C = \frac{57}{40}$</div>	$D = 7 - \frac{7}{3}$ $D = \frac{7}{1} - \frac{7}{3}$ $D = \frac{7 \times 3}{1 \times 3} - \frac{7}{3}$ $D = \frac{21}{3} - \frac{7}{3}$ $D = \frac{21-7}{3}$ <div style="border: 1px solid blue; display: inline-block; padding: 2px;">$D = \frac{14}{3}$</div>

III Résolution de problème

Problème 1 : Calculer un total	Problème 2 : Calculer un reste	Problème 3 : Enchaînement d'opérations
<p>J'ai mangé un dixième d'une tablette de chocolat le lundi et deux cinquièmes le mardi. Quelle proportion de la tablette ai-je mangé depuis lundi ?</p> $S = \frac{1}{10} + \frac{2}{5}$ $S = \frac{1}{10} + \frac{2 \times 2}{5 \times 2}$ $S = \frac{1}{10} + \frac{4}{10}$ $S = \frac{1+4}{10}$ $S = \frac{5}{10}$ $S = \frac{5:5}{10:5}$ $S = \frac{1}{2}$ <p>J'ai mangé la moitié de la tablette depuis lundi.</p>	<p>Inès a déjà appris $\frac{4}{9}$ de sa leçon. Quelle fraction de sa leçon lui reste-t-il à apprendre ?</p> $R = 1 - \frac{4}{9}$ $R = \frac{1}{1} - \frac{4}{9}$ $R = \frac{1 \times 9}{1 \times 9} - \frac{4}{9}$ $R = \frac{9}{9} - \frac{4}{9}$ $R = \frac{9-4}{9}$ $R = \frac{5}{9}$ <p>Inès doit encore apprendre $\frac{5}{9}$ de sa leçon.</p>	<p>Charles a réparti son argent de poche : $\frac{1}{7}$ pour de la nourriture, $\frac{4}{7}$ pour ses loisirs et le reste pour faire des cadeaux. Quelle fraction de son argent de poche est réservée pour les cadeaux ?</p> <p><u>nourriture + loisirs :</u></p> $S = \frac{1}{7} + \frac{4}{7}$ $S = \frac{5}{7}$ <p><u>reste :</u></p> $R = 1 - \frac{5}{7}$ $R = \frac{1}{1} - \frac{5}{7}$ $R = \frac{1 \times 7}{1 \times 7} - \frac{5}{7}$ $R = \frac{7}{7} - \frac{5}{7}$ $R = \frac{2}{7}$ <p>$\frac{2}{7}$ de son argent de poche est réservée pour les cadeaux.</p>