454 Exemples d'applications de la notion de compacité.

~~**Exercice 1** Point fixe Francinou TP 4.12 p116~~

~~Soit K partie compacte d'1 evn E de dim finie et~~

~~$f : K \to K$ tq $\forall (x,y) \in K^2$ $x \neq y \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$~~

~~1) Mq f admet 1 unique point fixe ℓ. Pour l'existence on pourra considérer l'application $h : K \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|f(x) - x\|$~~

(A relever cours ou dev cours)

~~2) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ def par récurrence pour $u_0 \in E$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Mq $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cv vers ℓ.~~

Exercice 2 1er théorème de Dini : TEU AP ex 10.3 p556

Soit K un compact d'un espace vectoriel de dim finie et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite croissante à valeurs dans $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$

Démontrer que si la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers $f \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$, alors la convergence est uniforme.

$g_n = f - f_n$, g_n continues et positives
compacité, BW, extraction
par l'absurde

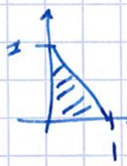
Exercice 3 Delaunay ex 16 p 483 Analyse AP

Soit $f : (x,y) \mapsto xy(1 - x - y)$ définie sur

$$T = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0 \text{ et } x + y \leq 1 \}$$

a) Justifier que f est continue et prend un maximum à l'intérieur de T

b) Déterminer sa valeur



T fermé, borné $\Rightarrow T$ compact
atteint ses bornes
⊕ annulation des 2 der. partielles.

Exercice 4 Ellipsoïde de John Loewner Kalton modifié

(Skandalis Analyse p242)
Pułkowski ex 116 p 539

Soit K compact non vide de $\mathbb{R}^n$. Le but est de montrer qu'il existe un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimale contenant K. Notons Q (Q^+ / Q^{++}) ens. des fon quadratiques (pos / déf pos)

1°/ Mq qu'à toute fon quadratique, on peut associer un ellipsoïde que l'on précisera.

2°/ Soit E_q cet ellipsoïde, montrer que V_q, volume de E_q, est proportionnel à V_0 volume de la boule unité pour la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$

3°/ Mq un ellipsoïde centré sur 0 de volume V_q minimale et contenant K.

Pour cela, on munit Q de la norme $N : q \mapsto \sup_{\|x\|=1} |q(x)|$

et on s'intéresse à $A = \{q \in Q^+ \ \forall x \in K \ q(x) \leq 1\}$

4°/ Après avoir montré que A est convexe et en utilisant le résultat suivant : le déterminant est log-convexe sur S_n^{++}, conclure sur l'unicité.

Exercice 5 Procédé diagonal. TEU MP Ex 6.11 p321

à clarifier

par sélection des compacts ms déf d'image

On note ℓ_1 ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs complexes tq $\sum u_n$ converge absolument. On munit ℓ_1 de la norme $\|u\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$

Soit A l'ensemble des suites (u_n) vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$ $|u_n| \leq \frac{1}{2^n}$

1°/ Justifier que A est une partie de ℓ_1

2°/ Soit $\ell = (\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de A et $(u^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ suite d'éléments de A. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ $u^{(p)}$ est donc élément de A

Son $n^{\text{ème}}$ terme est noté $u_n^{(p)}$. Mq $u^{(p)} \xrightarrow[p\to+\infty]{} \ell$ ssi

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n^{(p)} - \ell_n| \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$$

3°/ Mq A est compact.

Pour 3°/.
$(u^{(p)})$ suite d'élts de A
extraire une sous-suite qui cvg vers un élt de A.

→ construction d'1 extraction qui permet à $(u^{\varphi(p)})$ de converger.

Compléments.

1) Ex 2.30 X-ENS Analyse 3 Ensemble de Julia

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $P_n = P \circ P \circ \dots \circ P$ (n facteurs). Soit K_P l'ensemble des nombres complexes z tq $(P_n(z))$ soit bornée.

1°/ Déterminer P_{X^2}

2°/ Montrer que K_P est non vide

3°/ Montrer que K_P est 1 compact (Supposer dessin $\mathbb{C}$)

2) Théorème de Carathéodory Pillouli ex 52 p 231 / Gourdon An ex 6 p 54

Enveloppe convexe d'une partie compacte de E (espace affine réel de dimension n) est compacte.

Exercices classiques dans le Monier p 62 et 66 Analyse MP.

Ex 1.3.4 p 62

E, F 2 evn. A partie de E, $f : A \to F$ une appli tq $\overline{f(A)}$ soit compact.

Mq si le graphe G_f de f $G_f = \{(x, f(x)), x \in A\}$ est fermé dans $A \times F$ alors f est continue.

DEV

Ex 6.23 TEU MP p 324 + Lasret (ex 22 p 226 Delaunay Analyse MP)

E espace vectoriel normé, K compact convexe de E non vide

1) u endo continu de E qui laisse K stable. Mq u possède 1 pt fixe K

2) (u_n) suite d'endo continus, commutant 2 à 2, laissant K stable.

Mq les u_n ont dans K un pt fixe commun