439. Exemples d'études d'applications linéaires continues et leur norme.

1) **Norme de l'adjoint** Cours Rombaldi Analyse MP p95
⊕ ex. P.1.2 p57 sur espace préhilbertien.

$f \in \mathcal{L}_C(E)$ tq f admette l'adjoint.
Démontrer que 1) $f^* \in \mathcal{L}_C(E)$
2) $|||f^*||| = |||f|||$
3) $|||f^* \circ f||| = |||f \circ f^*||| = |||f|||^2$

2/ **Normes de $M_n(\mathbb{K})$ subordonnées à celles de $\mathbb{K}^n$.** (DEV)

1°/ $\mathbb{K}^n$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ tq $\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|$ avec $x = (x_1, \dots x_n)$

Pour $A \in M_n(\mathbb{K})$, déterminer $|||A|||$ avec $|||\cdot|||$ norme subordonnée à $\|\cdot\|_\infty$. Gourdon Alg p 220 ex 8.1

2°/ Même question pour $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2}$

3°/ Même question pour $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ Gourdon analyse p151
Aussi Rombaldi OL, ex 25.1 p432

3°/ **Cas où la norme n'est pas atteinte** Gourdon Analyse p151

$E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ $\|\cdot\|_\infty$ $\varphi : E \to \mathbb{R}$
$$f \mapsto \varphi(f) = \int_0^{1/2} f(t)\,dt - \int_{1/2}^1 f(t)\,dt$$

1°/ Mq $\varphi \in \mathcal{L}_C(E, \mathbb{R})$

2°/ Mq $|||\varphi|||$ n'est pas atteinte (introduire des fonctions affines par morceaux)

4°/ **Distance d'un noyau d'une forme linéaire** (DEV) Rombaldi Analyse MP 1.2.11 p57

Soit E un evn non réduit à $\{0\}$, $\varphi \in E' \setminus \{0\}$ (E' formes linéaires sur E)
$H = \ker \varphi$

Mq les assertions sont équivalentes :
i) $\exists a \in E$ ($\|a\| = 1$ et $|||\varphi||| = |\varphi(a)|$)
ii) $\forall x \in E$ $\exists h \in H$ $d(x, H) = \|x - h\|$
iii) $\exists x \in E \setminus H$ $\exists h \in H$ $d(x, H) = \|x - h\|$

(OK)

exercice équivalent X-ENS Analyse 3 ex 1.27 et 1.28 p 45.

f linéaire et continue où Ker f fermé

puis $|||f||| = \dfrac{|f(x_0)|}{d(x_0, \operatorname{Ker} f)}$

et équivalence $\exists a \in E \setminus \{0\}$ $|||f||| = \dfrac{f(a)}{\|a\|}$ ⟺ $\exists b \in \operatorname{Ker} f$
$\|x_0 - b\| = d(x_0, \operatorname{Ker} f)$

Sinon pour dev, X-ENS Alg 3 p 130 (A voir) :

Soit E espace euclidien, $B = \{u \in \mathcal{L}(E) \ |||u||| \leq 1\}$.

Mq les points extrémaux de B (ie les $u \in B$ tq $B - \{u\}$ est convexe) sont exactement les éléments de $O(E)$

Compléments = Ex 1.2.15 p 57 Rouvière Analyse ??? facile - Application directe

$E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\|.\|_\infty$

$T : E \to E$
$f \mapsto T(f)$ $\quad \forall f \in E, \forall x \in [0,1]$
$(T(f))(x) = \int_0^x f.$

Mq T est linéaire continue et calculer $|||T|||$

Sinon autres choses non pige.