435 Exemples de modélisation en situation réelle en probabilités

Exercice 1 (Ex 25.11 TEU MPSI p1441)

Un bit est 1 symbole info élémentaire valant 0 ou 1. Un canal de transmission transmet des bits selon le modèle suivant : il transmet fidèlement 1 bit avec probabilité p et de façon erronée avec proba $1-p$, avec $0<p<1$.

Un bit traverse n canaux de ce type successivement. On suppose que chaque canal fonctionne indep. Soit x_0 le bit initial, pour $n\in\mathbb{N}$ on note x_n la valeur de ce bit après n canaux et p_n sa proba que $x_n = x_0$.

1) Déterminer la relation entre p_{n-1} et p_n pour $n\geq 1$
2) En déduire l'expression de p_n en fonction de n et p
3) Limite de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 2 Le remplissage d'un avion Ex 15.7 TEU MP p 902

Un avion comporte n sièges $(n\geq 2)$. Chacun des n passagers a une place qui lui est réservée.

- Le premier passager arrive, il s'installe où il veut et choisit une place au hasard.
- Les passagers suivants quand ils arrivent s'installent à leur place sauf si celle-ci est déjà occupée auquel cas, ils choisissent une place au hasard parmi les places restantes.

Déterminer la probabilité pour que le dernier passager s'installe à sa place.

Exercice 3 : Remplir sa carte d'Europe ex 22 p408 Delaunay MP
ou Fenlon ex 15.2 p322

Pour remplir sa carte, on peut acheter des paquets de savon afin d'obtenir un magnet. La collection complète comporte N

magnets. On se pose la question du nombre de paquets à acheter pour obtenir la collection complète.

a) montrer qu'il est presque sûr d'obtenir la collection complète en un nombre fini d'achats.

On limite l'étude à l'espace de proba où la collection complète est toujours obtenue en un nombre fini d'achats. Pour $k \in [\![1, N]\!]$, on note $X_k \in \mathbb{N}^*$ le nombre d'achats ayant permis d'obtenir k magnets diff. En particulier $X_1 = 1$ et X_N est le nombre d'achats nécessaires à l'obtention de toutes les cartes.

b) Soit $k \in [\![1, N]\!]$. Par quelle loi peut-on modéliser $X_{k+1} - X_k$?

c) En déduire une expression de l'espérance de X_N.

<u>Exercice 4</u> L'aiguille de Buffon ex 110 p 675 Pelle / Dupont p 600

Dans son mémoire sur le jeu du Franc-carreau, Buffon s'est intéressé au problème suivant. On dispose d'un plancher dont la largeur des lattes est L et d'aiguilles de taille ℓ. On jette ces aiguilles sur le plancher et on regarde si l'aiguille coupe deux planches (rainures). On répète n fois l'expérience. Buffon remarque que la fréquence à laquelle l'aiguille coupe deux planches est $f_n \simeq \frac{2\ell}{\pi L}$. Comment prouver ce résultat ?

a) De la modélisation : en modélisant les rainures comme un réseau de droites, calculer la probabilité que l'aiguille coupe l'une des droites.

b) En déduire une méthode d'estimation de π.

TEU NP. p885 ex 8 p ∈ Ju, L aso. leçon 435

~~DJZ~~ pa proba q'une fille ait n enfants pur = exp°

Syphs fille / garçon indep

1) calcul le proba pour avoir a ce enfant

2) proba q'une fille ait 2 enfants sachant q'elle a 2 filles

3) 2 garçons sachant q'elle a 2 filles.

→ proba conditionnelle / probas totales.

⊕ série exercices.

TEU ex 15.7 avion.

TEU p 903 ex 15.11 le gardien ~~[illegible]~~ ivre.

15.15 Ruine des joueurs / Foata 14.12 p311 Tournoi ex 13 p355 Delang. Ex 15.10 TEU

15.16 banque et parapluie

⊕ Dupont p200.

Problème Aiguille de Buffon ? ex 140 p 679 exclure

clés d'assurance sans remise ex 139 p 675 | Dupont ex 5.5 p 244

Ruine joueur / Kolletion ex 131 p 669 collect. Delang. ex 22 p408

Processus de Galton p 598 ex 127 Foata 15.2 p 322

Des truqués et loi unif p 583 ex 124.

Ls cotulle p67 ~ généralisé

Temps de jeu à la roulette Kalon. 15.6 p828

PS de noteurs → cotulle p13) Rouss TTEU NPS: ex 29.11. Tessuth de S-b

Ex 3 (collectionneur) énoncé Delaunay

a) on numérote les images de 1 à N.

Pour $i \in [\![1,N]\!]$, $A_{i,n}$: « l'acheteur n'acquiert pas l'image d'indice i en un nombre fini d'achats »

La probabilité qu'il n'obtienne pas l'image i en n achats est : $\left(\frac{N-1}{N}\right)^n$

Par continuité décroissante(*), $\mathbb{P}(A_{i,n}) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{N-1}{N}\right)^n = 0$

L'évènement A_i est négligeable

L'évènement « Ne pas obtenir la collection complète en un nombre fini d'achats » correspond à l'union de tous les A_i. Il est négligeable en tant que réunion finie d'évènements négligeables

(*) pas l'image en n achats, en $(n+1)$ achats, ... $= \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_{i,n}$ est une suite décroissante d'évènements

donc $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_{i,n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_{i,n}) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{N-1}{N}\right)^n = 0$

b) idée : k images distinctes sur N ont été acquises, obtenir une nouvelle image se comprend comme un temps d'attente d'un succès dans une suite d'épreuves de Bernoulli de paramètre $\frac{N-k}{N}$.

Prouvons-le : pour $n \in \mathbb{N}^*$

B_n : « on obtient une nouvelle image au $n^{\text{ème}}$ achat »

Soit $k \in [\![1,N-1]\!]$ et $m \in \mathbb{N}^*$ calculons $\mathbb{P}(X_{k+1} - X_k = m)$

il faut attendre m achats pour avoir 1 nouvelle image.

Compréhension $X_5 = 10$ il faut réaliser 10 achats pour obtenir 5 cartes

$X_5 = 11$. ———— " ———— ————————

donc la famille $\left((X_k = n)_{n \geq k} \right)$ est un système complet d'évts

Formule des probas totales :

$$\mathbb{P}(X_{k+1} - X_k = m) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X_{k+1} - X_k = m \mid X_k = n)\, \mathbb{P}(X_k = n) \quad \oplus$$

or pour $n \geq k$.

$$\mathbb{P}(X_{k+1} - X_k = m \mid X_k = n) = \mathbb{P}\left(\overline{B_{n+1}} \cap \overline{B_{n+2}} \cap \dots \overline{B_{n+m-1}} \cap B_{n+m} \mid X_k = n \right)$$

Sachant que $(X_k = n)$, la proba $\overline{B_{n+1}}$ vaut $\dfrac{k}{N}$ car l'acheteur a

k images sur N lors du $(n+1)^{\text{ième}}$ tirage

Sachant $(X_k = n)$, et $\overline{B_{n+1}}$, la proba $\overline{B_{n+2}}$ est identique car la config. est la même au $(n+2)^{\text{ième}}$ tirage.

... $\mathbb{P}(B_{n+m}) = \dfrac{N-k}{N}$ (obtenir une nouvelle image)

Par les probas composées.

$$\mathbb{P}(X_{k+1} - X_k = m \mid X_k = n) = (1-p)^{m-1} p \quad \text{avec } p = \frac{N-k}{N}$$

$\oplus$ on obtient $\mathbb{P}(X_{k+1} - X_k = m) = (1-p)^{m-1} p \underbrace{\sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X_k = n)}_{=1 \text{ car syst. d'évts}}$

$$= (1-p)^{m-1} p.$$

$(X_{k+1} - X_k)$ suit loi géométrique de paramètre p.

c) Par linéarité de l'espérance et télescopage

$$X_N = X_1 + (X_2 - X_1) + \dots + (X_N - X_{N-1})$$

$$\mathbb{E}(X_N) = \mathbb{E}(X_1) + \sum_{k=1}^{N-1} \mathbb{E}(X_{k+1} - X_k) = 1 + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{N}{N-k}$$

car $\mathbb{E}(X_{k+1} - X_k) = \frac{1}{p} = \frac{N}{N-k}$ (départ page 98)

d'où $\mathbb{E}(X_N) = 1 + N \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{N-k} = 1 + N \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{j}$

$= N \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j}$

Compléments (Fin du)

Par équivalence, on reconnaît la série harmonique.

comparaison série-intégrale.

$k \in \mathbb{N}^*$, $t \in [k, k+1]$ $\quad \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$

par intégration, il vient $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$

et en notant $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, par relation de Chasles

$S_{n+1} - 1 \leq \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} \leq S_n.$

donc $\ln(n+1) \leq S_n \leq \ln(n) + 1$

donc $S_n \sim \ln n$

Equivalent de $\mathbb{E}(X_N) \underset{+\infty}{\sim} N \ln N$

pour 100 images, il faut en moyenne 460 achats.

$$\mathbb{P}(X_{\ell+1}-X_\ell = m) = \sum_{n=\ell}^{+\infty} \mathbb{P}(X_{\ell+1}-X_\ell = m \mid X_\ell = n)\,\mathbb{P}(X_\ell = n)$$

$$\mathbb{P}(X_{\ell+1}-X_\ell = m \mid X_\ell = n) = \mathbb{P}(\overline{B_{n+1}} \cap \overline{B_{n+2}} \cap \cdots \overline{B_{n+m-1}} \cap B_{n+m} \mid X_\ell = n)$$

$$= \frac{\mathbb{P}(\overline{B_{n+1}} \cap \cdots \overline{B_{n+2}} \cap \cdots \overline{B_{n+m-1}} \cap B_{n+m} \cap \{X_\ell = n\})}{\mathbb{P}(X_\ell = n)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(\overline{B_{n+1}} \cap \{X_\ell = n\})}{\mathbb{P}(X_\ell = n)} \times \mathbb{P}(\overline{B_{n+2}} \mid \overline{B_{n+1}} \cap \{X_\ell = n\}) \cdots$$

$$= \underset{①}{\mathbb{P}(\overline{B_{n+1}} \mid X_\ell = n)} \times \underset{②}{\mathbb{P}(\overline{B_{n+2}} \mid \overline{B_{n+1}} \cap \{X_\ell = n\})} \times \underset{③}{\mathbb{P}(\overline{B_{n+3}} \mid (\overline{B_{n+2}} \cap \overline{B_{n+1}} \cap \{X_\ell = n\})}$$

$$\times \cdots \times \underset{④}{\mathbb{P}(B_{n+m} \mid \overline{B_{n+1}} \cap \cdots \cap \overline{B_{n+m-1}} \cap \{X_\ell = n\})}$$

$$① = \frac{\ell}{N} \;/\; ② = \frac{\ell}{N} \cdots / \; ④ \; \frac{N-\ell}{N}.$$

435 · Exemples de modélisation de situations réelles en probabilité.

Sander

Exercice 1

X Ens 1 alg
[DUV]
1.2 & 1.3

Si n personnes quittant une réunion prennent au vestiaire un parapluie au hasard, quelle est la probabilité pour que personne n'ait son propre parapluie ?

1. Soit D_n le nombre de permutations de S_n n'ayant pas de point fixe, montrer que $n! = \sum_{k=0}^{n} C_n^k D_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k D_k$.

2. On considère la série entière $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_k}{k!} z^k$ et on note D sa somme et R son rayon.
Minorer son rayon R et calculer $D(z)$ pour $|z|<R$.

3. En déduire que $D_k = E[\frac{k!}{e} + \frac{1}{2}]$.

Exercice 2

[Ouv]
3.6

Le nombre de clients arrivant dans un magasin pendant une journée de vente est supposé suivre une loi de Poisson de paramètre λ.
Un client achète un article A avec la probabilité p (il achète au plus un article). Le stock d'articles A à l'ouverture du magasin est s $(s \geq 1)$.

1. Calculer la loi du nombre d'articles demandés en une journée
2. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait pas rupture de stock de l'article A durant cette journée

Exercice 3

[Escof]
8.1

On désire tester un dé afin de savoir s'il n'est éventuellement pas pipé.
Combien de lancers de ce dé doit-on effectuer pour pouvoir affirmer, avec un risque d'erreur inférieur à 5% que la fréquence d'apparition du 6 au cours de ces lancers diffère de 1/6 d'au plus 0,01 ?

Exercice 4

(ISBN 9782-10-046047-3)

Sur un long trajet, 5 % des trains arrivent avec un retard de plus de 10 minutes. Soit X la v.a. égale au nombre de train parmi 100 qui arrivent avec un retard de plus de 10 minutes. Les retards sont supposés indépendants.

1. Préciser la loi de X.
2. Par une approximation de la loi de X par une autre loi calculer $P(X=3)$
3. On suppose ici que X est le nombre de trains qui arrivent avec plus de 10 minutes de retard sur 1000 trajets. En justifiant l'utilisation de la loi normale, en déduire une approximation de $P(X=50)$ puis $P(40 < X \leq 60)$.

Exercice 5

[OUV]

3 [On veut estimer un pourcentage p de réponse positives à un référendum. Pour cela on effectue un sondage sur n personnes et on estime p par la fréquence relative F_n de oui des personnes sondées.

Soit X une variable aléatoire de moyenne inconnue m et d'écart type σ.
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X. On estime la moyenne m par la variable aléatoire $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$.

Soit $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ la fonct° de répartition de la loi N

1. Justifier l'approximation pour $\alpha>0$ et n grand.

$$P(|\overline{X}_n - m| \geq \alpha) \simeq 1 - \left[\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\alpha\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\alpha\right)\right]$$

2. Quelle est ~~la taille minimum~~ la valeur minimale de n pour que $\alpha>0$ et $\beta \in]0,1[$ étant fixés

$$P(|\overline{X}_m - m| \geq \alpha) \leq \beta.$$

3. 3.

4. Application numérique : on choisit $\beta = 0{,}05$ et $\alpha = 0{,}01$.
i) l'on sait que $0 < p < 0{,}3$
ii) p est totalement inconnu. iii) Par combien est divisée la population ?

435 Modélisation en situation réelle

Lois
Bernoulli : (2, 3, 4, 5)
Binomiale (ex 2 et 4)
Poisson (ex 2 et 4)
Normale (2, 3 et 4)

Espérance / variance.
Inégalité de B.T. $\forall a \in \mathbb{R}_+ \quad \mathbb{P}(|X - E(X)| > a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$
Fonction de répartition d'1 va

$X \sim \mathcal{B}(n,p) \quad n \geq 30 \quad p < 0{,}1 \quad np < 18$

Approx par $\mathcal{P}(np)$

(X_i) iid. $\quad \frac{S_n - np}{\sigma\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$

Ex 1 = nb de dérangements

Ex 2 - dev

Ex 3 - soit B.T, il faut 27778 lancers
TCL, $n = 5336$.

B.T est 1 majoration

Ex 4 Approx d'1 loi binomiale par 1 poisson.

Ex 5 = Référendum / sondage.

Exercice 2 - Achat d'1 seul article A.
Stock au mois égal à 1. Pb de rupture du stock.

On se place dans $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace proba.
N : nombre de personnes qui entrent ds le rayon (va)

$N \sim \mathcal{P}(\lambda)$

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de var qui représente la décision d'achat du client.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$ $X_n = \begin{cases} 1 \text{ si } n^{\text{ième}} \text{ client achète } A \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

$X_n \sim \mathcal{B}(p)$ avec p déf dans l'énoncé

X_n sont indépendants

$\sum_{j=1}^{n} X_j \sim \mathcal{B}(n,p)$

→ T var qui représente la demande de l'article A ce jour.

Trouver la loi de T.

$\{T=0\}$ = aucune demande de A

$= \{N=0\} \cup \{\bigcup_{n\geq 1}(N=n) \cap \sum_{j=1}^{n} X_j = 0\}$

(1) réunion disjointe

disjoint.

$(A_j = "N=j")$ forme une partition de l'ensemble Ω.

$\mathbb{P}(T=0) = \mathbb{P}(N=0) + \sum_{n\geq 1}\mathbb{P}(\{N=n\} \cap \sum_{j=1}^{n} X_j = 0)$

$= \mathbb{P}(N=0) + \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(N=n)\ \mathbb{P}(\sum_{j=1}^{n} X_j = 0)$ par indep, N/X

$= \underbrace{e^{-\lambda}}_{\text{poisson}} + \sum_{n\geq 1} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \times C_n^0 p^0 (1-p)^n$

$= e^{-\lambda} + e^{-\lambda}\sum_{n\geq 1} \frac{(\lambda(1-p))^n}{n!}$

$= e^{-\lambda}\left(1 + \sum_{n\geq 1}\frac{(\lambda(1-p))^n}{n!}\right) = e^{-\lambda} \times \underbrace{\sum_{n\geq 0}\frac{(\lambda(1-p))^n}{n!}}_{e^{\lambda(1-p)}}$

$= e^{-\lambda p}$

$\forall k\in\mathbb{N}^*$, $(T=k) = \bigcup_{n\geq k}\left(N=n \cap \sum_{j=1}^{n} X_j = k\right)$ partitions

σ-additivité de la proba

$\mathbb{P}(T=k) = \sum_{n\geq k} \mathbb{P}(N=n) \times \mathbb{P}(\sum_{j=1}^{n} X_j = k)$ et avec N/X disjoint.

$$\mathbb{P}(T=k) = \sum_{n\geq k} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\times\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$$

$$= e^{-\lambda}\frac{p^k}{k!}\sum_{n\geq k}\frac{\lambda^n(1-p)^{n-k}}{(n-k)!} \qquad \lambda^n = \lambda^{n-k}\lambda^k$$

$$\ell = n-k$$

$$= e^{-\lambda}\frac{\lambda^k p^k}{k!}\underbrace{\sum_{\ell\geq 0}\frac{\lambda^\ell(1-p)^\ell}{\ell!}}_{e^{\lambda(1-p)}}$$

$$= \frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda p} \qquad T \sim \mathcal{P}(\lambda p)$$

Pas de rupture de stock : $\mathbb{P}(T\leq s) = e^{-\lambda p}\sum_{k=1}^{s}\frac{(\lambda p)^k}{k!}$

→ loi exponentielle et temps d'attente

→ loi géométrique

→ marche aléatoire. inégalité de Hoeffding.

→ problème des lanceurs de balles.

varier les lois

Outils probabilistes avec l'algèbre. commutant

D_4 à 8 éléments.

sondage.