425 Exemple d'études et de résolution de systèmes différentiels linéaires

Ex 1 : Système homogène, avec matrice diagonalisable (Ramis RP p463

Résoudre $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

d'inconnue $X : \mathbb{R} \to M_{4,1}(\mathbb{R})$

(Repose sur le th suivant, sol° donnée par $X(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t} V_i$ avec V_i base de vecteurs propres de A associés à $\lambda_1, \dots \lambda_n$)

→ solutions réelles conjuguées.

Ex 2 Système avec second membre. Ramis TTP ex 8.3.6 d) p47

Résoudre le système différentiel suivant d'inconnue x et y à valeurs $\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x' = x + y + \sin t \\ y' = -x + 3y \end{cases}$$

Idée : A trigonalisable (en dim 2 !)

chgt variable $Y = P^{-1}X$, calcul des méthodes, d'où la résolution.

Ex 3 Système à coefficient non constant Szroime ex 10.14. p312

Résoudre le système différentiel (E_0)

$$\begin{cases} x' = (1+t^2)x - y \\ y' = -(t-1)^2 x + y \end{cases}$$

Idée : trouver une solution évidente $y_1 : t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1+t^2 \end{pmatrix}$

et utiliser la structure de l'espace des solutions pour construire une base dont le 1er vecteur est y_1.

Recherche d'1 sol° de la forme $y = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i y_i + \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i e_i$

base canonique (y_i, e_i) sur $\mathbb{R}^n$

$\rightsquigarrow$ obtent° d'1 second eq diff. (cf cinquième Gourdon / Rouvière)

Exercice 4 Avec une exponentielle de matrice Gourdon ex 10.25 p 388

Résoudre (E_a) $\begin{cases} x' = -x + ay + az \\ y' = -x - y \\ z' = x - z \end{cases}$ où $a \in \mathbb{R}$

idée Calcul de e^{tA} avec énoncé du th. qui va bien.

décomposition de $A = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}}_{-I_3} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & a & a \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{B}$

avec I_3 et B commutent.

et tq $B^3 = 0$.

d'où on peut calculer $e^{tB} = I_3 + tB + \frac{t^2}{2} B^2$

puis e^{tA}

Exercice 5 : Gourdon p 329

Soit $T \in \mathbb{R}_+^n$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq $I_n - e^{TA} \in GL_n(\mathbb{K})$

et $B : \mathbb{R} \mapsto \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ applic. continue sur $\mathbb{R}$ et T périodique

Mq le syst différentielle $X' = AX + B$ sur $\mathbb{R}$ admet une et une seule solution T-périodique.

(par équivalence, $X(t+T) = X(t)$ où t fixé..

Mq $\exists!$ $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sol.)

Ex 6 : Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ définie négative   Pellion 104 p474. DEV

a) Soit $X_0 \in \mathbb{R}^n$. On considère une solution $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ du problème de Cauchy $X' = AX$ et $X(0) = X_0$.

Mq si $X_0 \neq 0$ alors pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists !\, t \in \mathbb{R}$ tq $\|X(t)\| = r$ avec $\|.\|$ norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$

b) $\forall X_0 \in \mathbb{R}^n$, on pose $q(X_0) = \int_0^{+\infty} \|X(t)\|^2 \, dt$ où X est déf dans a)

Mq q ainsi défini sur $\mathbb{R}^n$ est une forme quadratique définie positive

c) Soit $X_0 \in \mathbb{R}^n$, X déf cm a). Mq $s \mapsto q(X(s))$ est décroissante