n°27. Exemples d'étude de fonctions définies par une intégrale.

Monier 3 — Pommelet

3.5.5 Analyse MP p203

Ex 1 : Étude et représentation. (M3, ~~2.3.4.2~~ p.172)

Étudier et représenter graphiquement la fonction f d'une variable réelle x définie par :

$$f(x) = \int_0^{\pi} \sqrt{x + \cos t}\; dt$$

Ex 2 : Les bornes dépendent du paramètre (M3 exple p170)

Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[$,

$$\int_1^x \frac{\ln(x+t)}{t}\, dt = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + \int_1^x \frac{\ln(t+1)}{t}\, dt.$$

Ex 3 : Fonction Γ d'Euler (M3 p 220-221-224 dvlt) (221-224, 422)

1°) Pour tout $x \in]0, +\infty[$, mq l'application $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

On appelle fonction Γ d'Euler l'application

$$\Gamma :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

2°) Mq $\forall x \in]0, +\infty[$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$

3°) Mq Γ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et que $\forall k \in \mathbb{N}$ $\forall x \in]0, +\infty[$, $\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t}\, dt$

4°) Mq $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Ex 4 : Transformée de Laplace (Pommelet p197-198)

Soit f continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{C}$.

On note $C(f)$ l'ensemble des réels λ tq l'intégrale $Lf(\lambda) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-\lambda t}\, dt$ converge,

et $A(f)$ l'ens des λ tq la même intégrale abs. cv.

1°) Mq si $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-\lambda t}\, dt$ cv, alors $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-\mu t}\, dt$ cv pour tout $\mu > \lambda$.

2°) Si $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-\lambda t}\, dt$ CA, $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-\mu t}\, dt$ CA pour tt $\mu > \lambda$.

3°) f bornée $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, mq Lf est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $Lf^{(n)}(\lambda) = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n f(t) e^{-\lambda t}\, dt$

2ans. Prq : lim, dérivabilité, chgt var, convexité, fct trigo.
Obj : sur un exemple, comportement + représentation.
2h. continuité & dérivabilité sous $\int$.
Ex d'autre [illegible]. Obj : chgt var.

Pour [illegible]
[illegible] calcul [illegible] $\int$.

Niveau ? [illegible]
Prq : int. [illegible]
Obj : étude cas classique
[illegible] de référence.
[illegible]
(DM)
peut être prolongé par :
la convexité, l'équivalent [illegible], la représentation graphique.

+ chgt var.
Ex de synthèse [illegible] de Sup [illegible], DM

Bijection, inverse [illegible]
[illegible]