Pas d'essai sur la convergence monotone.

423. Exemples d'utilisation des th. de cv. dominée et de cv. monotone.

Ronzo 4 Soromna

Ex1 : Intégrales de Wallis (p233)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$$

Montrer que $I_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$

En utilisant le th. de convergence dominée.

∃ aussi autre preuve en explicitant les I_n.

Ex2 : Convergence monotone : comparaison de méthodes

Déterminer la limite, quand $n \to +\infty$, de $\int_0^{\pi/4} \tan^n x \, dx$

1°) Par un changement de variable

2°) Par le théorème de convergence monotone.

Comparaison de méthodes

Ex3 : Convergence dominée : comparaison de méthodes

Déterminer la limite, quand $n \to +\infty$, de $\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{x^{2n}+1} \, dx$

1°) En scindant le domaine d'intégration

2°) En utilisant le th. de convergence dominée.

Comparaison de méthodes

Ex4 : Intégrale de Gauss.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \, dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt$.

b) Montrer : $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$

c) On rappelle la formule de Wallis.

$$\int_0^{\pi/2} \sin^p x \, dx \underset{p\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2p}}$$

Retrouver la valeur de l'intégrale de Gauss :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(DM) - Suite de l'ex 1 -

chgt var $u = \cos x$, $t = u\sqrt{n}$.

$f_n(t) = \begin{cases} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n & \text{si } t \in [0;\sqrt{n}] \\ 0 & \text{si } t > \sqrt{n} \end{cases}$ + cv. dom

(Formule de Wallis : par intégrales de Wallis mq $I_n I_{n+1} \underset{n\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$, d'où $I_n^2 \sim \frac{\pi}{2n}$ - Possibilité possible avec sujet de DM).

+ ex 1 leçon 412 (avec DSE)

Exercice sur la convergence monotone

1) Démontrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 x^{2n}(1-x)\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$

2) En déduire que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2$

Sol° : 1) Posons $u_n(x) = x^{2n}(1-x)$

$u_n(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in [0,1]$.

de plus si $x \in]0,1[$, $\sum_n u_n(x)$ converge simplement vers

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}(1-x) = (1-x) \times \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{1+x}$$

cette fonction est continue sur $]0,1[$. La suite des sommes partielles est positive et croissante, car chaque $u_n(x) \geq 0$.

Th de cvg monotone, $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 u_n(x) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$

2) De plus $\int_0^1 u_n(x)\,dx = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$

donc $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\right) = \ln 2$.