481 Exemples de calcul exact et de calcul approché de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment - Aspect algorithmique

Exercice 1 : Sorosina p237 (changement de variable)

$u = t/\sqrt{a}$ ⊕ pb de déf en 0 → coupure en 2 intégrales puis passage à la limite

$a \in \mathbb{R}_+^*$, calculer $I = \int_0^{\sqrt{a}} \frac{dt}{\sqrt{a+t^2}+\sqrt{a-t^2}}$

Exercice 2 Sorosina p233 (Récurrence) / Fredon MPSI p261 / Dantzer p218

Pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt$. (Wallis)

1) Mq $\forall p \in \mathbb{N}$ $I_{2p} = \frac{(2p)!}{4^p (p!)^2} \frac{\pi}{2}$ et $I_{2p+1} = \frac{4^p (p!)^2}{(2p+1)!}$

2) Mq $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0

3) Etablir que $I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

Exercice 3 Sorosina p248 / Rombaldi O2 ex 25.1 (q2) - Somme de Riemann

Soit $a \in]1;+\infty[$, calculer

$$I = \int_0^{\pi} \ln(1-2a\cos t + a^2)\, dt$$ Intégrale de Poisson.

Exercice 4 Intégrale de Gauss par 2 moyens - Escoffier p137 / Ex 6.6 p140

X-ENS An 3 p220

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}\, dx$$ A éviter car ce n'est pas 1 segment

1) En posant $I(a) = \int_0^a e^{-x^2/2}\, dx$ et en calculant $I(a)^2$ via un changement de variable, calculer la valeur de I

2) Soit $g : \begin{cases} [0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}\, dt \end{cases}$

(moyen) à cause de la suite de l'attendu

a) Mq g est dérivable et exprimer g en fonction de f avec

$$\forall x \geq 0 \quad f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

b) en encadrant $g(x)$, montrer que $g(x) \xrightarrow[+\infty]{} 0$

c) En déduire la limite de f en $+\infty$.

Exercice 5 Erreur d'approximation dans la méthode des trapèzes. | Rombaldi: 02 25.5 p 375 | Analyse p 207

On définit $T_n = \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + \frac{f(b)}{2} \right)$

1) Interpréter la formule avec l'approximation des rectangles.

2) On suppose $f \in C^2$. Calculer à l'aide d'IPP

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - x_k)(x_{k+1} - x) f''(x)\, dx$$

3) On suppose que $f \in C^2$ et $\|f''\|_\infty \leq M_2$. Démontrer que

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt - T_n \right| \leq \frac{M_2 (b-a)^3}{12 n^2}$$

Bonus 4) $f \in C^2$, à l'aide de la formule de la moyenne, démontrer que

$$T_n = I + \frac{(b-a)^2}{12 n^2} \left(f'(b) - f'(a) \right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

5) Appli num, $\quad f(x) = \frac{1}{1+x}$ pour $x \in [0,1]$

Exercice 6 : Méthode de Gauss pour l'intégration Analyse p 202 / Ex 51 p 48 Pulko

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}_n[X]$ muni de $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 PQ\, dt$

Soit $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ obtenue par orthonormalisation de Gram-Schmidt à partir de $(1, X, \dots X^n)$

1°/ Mq P_n possède n racines distinctes dans $]0,1[$

2°/ Soit $\{a_i, i \in [\![1,n]\!]\}$ l'ensemble des racines de P_n et L_i, $i \in [\![1,n]\!]$ polynômes de Lagrange associés à a_i. On pose $\lambda_i = \int_0^1 L_i(t)\, dt$ tq:
Mq $\int_0^1 P\, dt = \sum_{i=1}^n \lambda_i P(a_i) \quad \forall P \in \mathbb{R}_n[X]$ puis $\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$.