Ex1 Approx $\sqrt{x}$ — par suite Rouse RPS p201 ou Approx de π par Plouffe.
Ex2 Approx de $\sqrt{x}$ par suite d'applicatn Rouse Analyse RP p311
Ex3 weierstraß.
Ex4 Th de Fejer

4.17. Exemples illustrant divers modes d'approximation de fonctions numériques.

Rouvre 4. — Gourdon

Approx par des polynômes, par des polynômes trigonométriques.
Idée: $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, que l'on cherche à approcher par qq chose de + simple (dont on connaît le comportement): polys et f^{ns} trigos.
Si on approche uniformément, les pbs d'approx se ramènent à: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists P$ tq $\|f - P\|_\infty < \varepsilon$, ...

Ex1: Approx$^°$ de $\sqrt{x}$ par des polynômes déf. par récurrence RM4 4.2.21 p34

On note $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polys définie par $P_0 = 0$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in[0,1]$
$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - (P_n(x))^2\right)$$
a) Mq $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in[0,1]$, $0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) \leq \dfrac{2\sqrt{x}}{2+n\sqrt{x}}$
b) En déduire que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ c.u sur $[0,1]$ vers $f: x \mapsto \sqrt{x}$

Ex d'entraînement, à faire après cu. Récurrence & inégalités.
Polys possible: $P_n \circ Q_n = P_n$ approche unift $|t|$ sur $[-1,1]$.

Ex2: Polynômes d'approximation de Bernstein G 7 p230.

On note $I = [0,1]$ et $\mathcal{C}$ l'ev des fonctions continues de I ds $\mathbb{C}$.
On note: $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall k\in[\![0,n]\!]$, $R_n^k: x \mapsto C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$.
et pour toute fonction $f\in\mathcal{C}$:
$\forall n\in\mathbb{N}$, $B_n(f): I \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) R_n^k(x)$.
a) Calculer explicitement l'expression $\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 R_n^k(x)$ puis en déduire que pour tout $\eta > 0$ et tout $x \in I$,
$$\sum_{k, \left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \eta} R_n^k(x) \leq \frac{1}{n\eta^2}$$
b) Pour tout $f\in\mathcal{C}$, mq la suite de f^{ns} $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ cu $\to f$ sur $[0,1]$. Conclure.

Ex de recherche

Ind$^°$: Considérer $F(a,b) = (a + (1-b))^n$ et $\frac{\partial F}{\partial a}$.

Ind$^°$: Voir l'expres$^°$ donnant $B_n(f)$ comme un barycentre des $f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Ex3: Théorème de Féjer. G 18 p282

Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et 2π-périodique. Pour $k\in\mathbb{Z}$, $e_k: x \mapsto e^{ikx}$, $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$.
Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on définit les f^{ns}: $S_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e_k$ (coeffs de Fourier), $C_n = \frac{S_0 + S_1 + \dots + S_n}{n+1}$.
$\tilde{S}_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} e_k$, $\tilde{C}_n = \frac{\tilde{S}_0 + \dots + \tilde{S}_n}{n+1}$.
a) Mq $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{C}_n(t)\,dt = 1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, et mq $\forall \alpha\in]0,\pi[$, la suite de f^{ns} $(\tilde{C}_n)$ cu$_s$ 0 sur $[-\pi,\pi] \setminus [-\alpha,\alpha]$.
b) En déduire le th. de Féjer: la suite de fonctions (C_n) cu$\to f$ sur $\mathbb{R}$

Ex de recherche (+ facile)
Mettre en évidence l'approx$^°$ par polys trigo.
Δ continuité unif., mais non évidente.

Ex4: Application. G 19 p283. Soit $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.
Mq pour toute fonct$^°$ continue $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-pér, on a:
$$\lim_{n\to+\infty} S_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt, \text{ où } S_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(2\pi\alpha k)$$
Ind$^°$ Utiliser le fait que f est limite uniforme de polynômes trigo sur $\mathbb{R}$ (cf ex 3 ↑)