1°/ Exo d'appli Monier MPSI
2°/ Th de Darboux ① cf ex sur TVI - Gourdon
3°/ Règle de l'Hôpital Rombaldi
4°/ Fct° d'plusieurs variables Monier

5°/ Fonctions dérivées d'plus de discontinuité dans Gourdon p255 ex9

4.15. Exemples d'applications du th. des AF et de l'inégalité des AF pour une fonction d'une ou plusieurs variables

Monier MPSI — Monier 3 — Monier 4 — Gourdon

d'abord ex 0 — ex 5.2.11, 5.2.12 p188 (cf dit 2.7)

Ex 1 : théorème de Darboux

1°) Soient I int. de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ dble sur I.
Mq $f'(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

2°) En déduire que pour $f :]a;b[\to \mathbb{R}$ dble sur $]a,b[$ tq $\lim_{a^+} f = \lim_{b^-} f = +\infty$, on a
$$f'(]a,b[) = \mathbb{R}.$$

Outils : – TVI
– th. AF pour f° $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (égalité)

Ind° pour 1°) : considérer
$\varphi : x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ si $x \neq a$, $f'(a)$ sinon
$\psi : x \mapsto \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$ si $x \neq b$, $f'(b)$ sinon.
Diff : disjonction des cas.

Arnaudiès MP 2.3.25 p 150

Ex 2 : Fonction à valeurs vectorielles

~~Ex 2.3.27 p157~~

E $\mathbb{R}$ev de dim finie, $n \in \mathbb{N}^*$, $f_1 : [0;1] \to E$ continue
$f_2, \dots f_n : [0;1] \to E$ définies par :
$\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $\forall x \in [0;1]$, $f_{k+1}(x) = \int_0^x f_k(t)\,dt$
On suppose : $\forall x \in [0;1]$, $f_1(x) = \int_0^x f_n(t)\,dt$.
Mq $f_1 = \dots = f_n = 0$

Outils – Inégalité AF sous forme $\int$.

Ind° (cf démo de l'inég. AF) : On remarquera que l'inég. des AF pour une f° à valeurs vect. revient à l'inégalité sur les intégrales :
$$\left\| \int_\alpha^\beta f'(t)\,dt \right\| \leq \int_\alpha^\beta \| f'(t) \|\,dt.$$

Ex 4 : Fonction de plusieurs variables

M4 8.1.13 p242

Soient ABC un triangle du plan euclidien, tel que A, B, C soient deux à deux distincts, $a = BC$; $b = CA$; $c = AB$.
Simplifier : $\operatorname{Arccos} \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} + \operatorname{Arccos} \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \operatorname{Arccos} \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

Niveau : 2e année.
Ind° : Considérer $f = f_1 + f_2 + f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
$f_1 = \operatorname{Acos} \frac{x^2+y^2-z^2}{2xy}$; $f_2 = \operatorname{Acos} \frac{y^2+z^2-x^2}{2yz}$; $f_3 = \operatorname{Acos} \frac{z^2+x^2-y^2}{2xz}$
mq $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0$,
on déduire $f = $ cte
} ceci est un corollaire de l'inégalité des AF

Ex 3 : Suites de fonctions : dérivée de la f° limite

G ex 8 p232

Soit (f_n) suite de f° dbles de $I = [0;1]$ ds E Banach.
tq $(f_n') \xrightarrow{cu} g$ sur I, et $\exists x_0 \in I$ tq $(f_n(x_0))$ cv.
Mq $(f_n) \xrightarrow{cu} f$ sur I où f est une f° dérivable f qui vérifie $f' = g$.

Prérequis : suite f°, c.u., Cr. Cauchy.
Niveau : 2e année.
Intérêt : complément du cours qui met en évidence un résultat rgble.
C'est l'IAF qui fait le lien entre f et f'.
Difficulté : traduct° de l'énoncé.

Ex 0 : Inégalités issues du TAF

UP — D'ABORD — MPSI 5.3.5, 5.3.8 p193

À l'aide du th. des AF, démontrer les inégalités suivantes :
a) $\forall x \in]-1, +\infty[$, $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$
b) $\forall (x,y) \in [0,1[^2$, $x < y \Rightarrow \frac{y-x}{\sqrt{1-x^2}} < \operatorname{Arcsin} y - \operatorname{Arcsin} x < \frac{y-x}{\sqrt{1-y^2}}$
c) $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\forall y \in]0,1[$,
$$x - \operatorname{Arcsin} y \leq \frac{\sqrt{1-y^2} - \cos x}{y}.$$

Niveau : 1e année
Intérêt : ex. d'entraînement à faire juste après le cours.
a) très simple
b) diff : arcsin
c) chgt var. $z = \arccos ...$