414. Exemples de séries de Fourier et leurs applications.

Ex 1. (Rombaldi? Analyse MP/MP* p710)

Soit f 2π-périodique définie pour tout $x \in [-\pi, \pi]$ par $f(x) = |x|$

1°/ Déterminer les coefficients de Fourier de f ($a_n(f)$ et $b_n(f)$)

2°/ Déterminer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$

3°/ Déterminer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

4°/ Déterminer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$

5°/ Déterminer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

Ex 2 (Seroshna, Analyse p122)

A l'aide de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique telle que

$$\forall x \in [-\pi, \pi] \quad f(x) = \frac{1}{\cos\left(\frac{x}{4}\right)}$$

1°/ En déterminant une relation de récurrence entre $a_n(f)$ et $a_{n-1}(f)$ pour $n \geq 1$, calculer

$$\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \left(\frac{1}{4j-3} - \frac{1}{4j-1} \right)$$

2°/ Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} (-1)^{j-1} \left(\frac{1}{4j-3} - \frac{1}{4j-1} \right) \right)^2$

Ex 3 : (Gourdon p277)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-périodique de classe C^1, on suppose que

$$\int_0^{2\pi} f(t)\, dt = 0$$

Montrer que $\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \leq \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt$. Cas d'égalité ?

Ex4 : Gourdon p284 / Formule sommatoire de Poisson

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, fonction de classe C^1 vérifiant $f(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $f'(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ pour $|x| \to +\infty$

on pose $F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n)$

1) On souhaite montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f^*(n) e^{2i\pi n x}$

où $\forall n \in \mathbb{Z}$ $f^*(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi n t} dt$

a) Justifier l'existence de F

b) Montrer que F est de classe C^1

c) Montrer que F est périodique de période 1

d) En déduire la formule annoncée.

(2) Application. Montrer que $\forall s > 0$ $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2/s}$

(on pourra utiliser le résultat suivant :

$\forall x \geq 0$ $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{-2i\pi t x} dt = \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 x^2}$) à écrire au tableau si temps.

Ex 5 : Carnet de voyage en Analystan. p 88 ex 40

Soit f 2π-périodique impaire qui vaut 1 sur $]0,\pi[$ et 0 en π

1°/ Vérifier que $a_k = 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$ et $b_{2k+1} = \frac{4}{\pi(2k+1)}$ $\forall k \in \mathbb{N}$

Soit pour $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$, on pose $S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} b_{2k+1} \sin((2k+1)t)$

2°/ Pour $t \notin \pi\mathbb{Z}$, montrer que $S_n'(t) = \frac{2}{\pi} \frac{\sin(2(n+1)t)}{\sin t}$. En déduire les variations de S_n

3°/ Soit $M_n = S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)$.

a) Montrer que $\lim_{n\to\infty} M_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin u}{u} du$

b) Montrer que cette limite est strictement supérieure à 1. ~~Conclure~~.
On admet que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2}$

Montrer que la convergence n'est pas uniforme.

Q| que signifie $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f$ cv.

il faut répondre $\lim_{N\to+\infty} \lim_{M\to-\infty} \sum_{n=M}^{N} u_n$ converge

ex $u_n = n$ $\sum_{n\geq 0} u_n \to +\infty$ et pourtant $\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n = 0$

$\sum_{n\leq 0} u_n \to -\infty$

ex $f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ quel sens pour $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge.

$\int_0^{+\infty} f$ converge : $\lim_{A\to} \int_0^A f$ converge et existe.

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ cvg si $\left[\begin{cases} \lim_{A\to+\infty} \int_0^A f \text{ cv} \\ \lim_{A\to-\infty} \int_A^0 f \text{ cv} \end{cases}\right]$ par def

---

converge normalement sur $\mathbb{R}$ entier ?

$f_n(x) = \frac{x}{n^2}$ $x \in \mathbb{R}$ cvg normalement sur $[-K,K]$

car $\forall x \in [-K,K]$ $|f_n(x)| \leq \frac{n}{x^2}$

mais f_n n'est pas bornée donc pas cvn.

Outils

$\left(\mathcal{D} = \{ f \in C^0_{pm,2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \right.$ tq $\forall x \in \mathbb{R}$ $\left. f(x) = \frac{1}{2}\left(f(x^+) + f(x^-)\right) \} \right)$

$\mathcal{D}$ espace de fonctions $f \in C_{pm,2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{1}{2}\left(f(x^+) + f(x^-)\right)$ régularisée.

Application $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} \bar{f}(t) g(t)\, dt$ produit scalaire esp. herm. $\mathbb{C}$

famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $e_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto e^{inx}$ est orthonormée dans $(\mathcal{D}, \langle\, \rangle)$

libre (1)

Th de convergences

Parseval : $f \in \mathcal{D}$ alors les séries $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f)^2$, $\sum_{n \geq 0} a_n(f)^2$ et $\sum_{n \geq 1} b_n(f)^2$

convergent et on a

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f)^2 = \frac{a_0^2(f)}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n(f)^2 + b_n(f)^2\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2\, dt$$

Dirichlet $f \in C^1_{pm,2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$

Alors la série de Fourier de f cvg simplement sur $\mathbb{R}$ vers sa régularisée $\tilde{f}(t)$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f)\, e^{inx} = \tilde{f}(x)$$

(+) Si f est continue sur $\mathbb{R}$, alors cvg normale de sa fonction vers f sur $\mathbb{R}$.

(1) n'est pas 1 base car pas génératrice.

$c_n(f) = \langle |x|, e^{inx} \rangle$

est-ce que les (c_n) sont tous nuls à partir d'1 certain rang ? NON donc pas une base

En supposant que f est $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ en plus de $f \in C^1_{pm,2\pi}$ alors la série de Fourier converge normalement (des coeff) vers f sur $\mathbb{R}$.

Ex 1 = Application du cours + calcul de somme

a) – Coeff de Fourier, regarder parité pour élaguer des coeff.
$\to$ f : paire $b_n(f) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$
Reste les $a_n(f) \ \forall n \in \mathbb{N}$

Par IPP. $S(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos((2k+1)\pi)$

b)c) Première somme, on a des carrés en dessous la somme
$\to$ f est C^1 par morceaux et C^0 sur $\mathbb{R}$.
$\Rightarrow$ th de Dirichlet, cvg de la série de F vers f, $x=0$

Puis astuce de décomp. $\sum \frac{1}{n^2} = \sum \frac{1}{(2p)^2} + \sum \frac{1}{(2p+1)^2}$

d) e) Puissance 4 : Parseval.
$f \in D$, $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, dt$.

Ex 2 = 1) fonction paire, $b_n(f) = 0$
chgt variable $u = \frac{t}{4}$ pour modifier le dénom.
Indice $a_n(f) - a_{n-1}(f)$ pour faire apparaître $\cos(a) - \cos(b)$
$\cos(a) - \cos(b) = -2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$
Assez technique avec beaucoup d'aller/retours

$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$
$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$

Pour calculer $a_0(f) = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x} = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos(x)}{\cos^2(x)} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1 - \sin^2(x)} dx$

par chgt variable $t = \sin x$

⊕ décomp fracts rationnelles

on conclut par le th de Parseval. car f est 2π-pér, continue sur $\mathbb{R}$.

$\sum_{n\geq 0} a_n(f)^2$ converge donc $\lim_{n\to+\infty} a_n(f) = 0$

Pour b), on réapplique Parseval

en remarquant qu'il faut utiliser le reste de la somme

$$a_n(f) = a_0 + \beta \sum_{j=1}^{n} (\;)$$

limite $$\sum_{j=1}^{\infty} (\;) = \frac{\ln(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}} = K$$

$$a_n(f) = a_0 + \beta\left(K - \sum_{j=n+1}^{\infty} (\;)\right)$$

$$a_n(f)^2 = \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} (\;)\right)^2$$

et calcul de $$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{\cos^2\left(\frac{t}{4}\right)} = \left[4\tan\frac{t}{4}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

Ex 3 Inégalité de Wirtinger.

on utilise le résultat $c_n(f) = \frac{1}{in} c_n(f') \quad \forall n \in \mathbb{Z}^*$

⊕ hyp $c_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0$

et périodicité $c_0(f') = 0$

D'où Parseval avec les hyp.

égalité des sommes pour $n=1$, d'où $f(t) = a e^{it} + b e^{-it}$

$(a,b) \in \mathbb{C}$.

Ex 5 Dev formule sommation de Poisson.

utilisation en théorie du signal pour échantillonnage des fréquences.

f représente un signal en fonction du temps

$\hat{f}$ son spectre en fréquence

$(f(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est un échantillon du signal.

Plus le spectre contient de grandes fréquences, plus le signal subit des variations brutales, plus il faut de valeurs d'échantillonnage.

→ ce qui est surprenant, c'est que l'on puisse connaître une application que via un ensemble dénombrable de points ($f(n)$)

→ hyp. faite sur son comportement à l'ex (sur le support compact)

<u>question 2</u>, application, fonction theta de Jacobi, utilisée par Riemann pour dans son équation fonctionnelle.

<u>Ex 5</u> = Phénomène de Gibbs.

Transformée de Fourier d'une fonction discontinue.

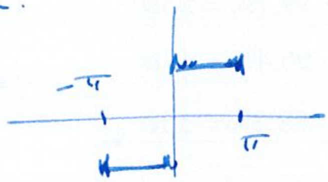
⇒ vibration à chaque point de discontinuité.

convergence uniforme sur les parties continues mais au bord, apparition de vibrations.

⇒ convergence non uniforme au bord.

Ex « à la main » pour montrer ce phénomène sur une application

signal : le créneau.



Repose sur des calculs classiques de $\sum_{k=1}^{n} \cancel{\cos}((2k+1))$

cas série géométrique.

Ls intéressant pour calculer le maximum de cette somme et le voyant c'est une <u>somme de Riemann</u> !

Dernière partie, étude de $S_n(x)$ via : série alternée

utilisation du critère TSSA pour minoration

et montrer que $\lim_{n\to+\infty} \|S_n - f\| \geq \frac{2}{\pi} \ldots > 1$ –

Séries de Fourier

Equation des cordes vibrantes (représentation des f° périodiques sous forme de séries) y oscillation de la corde à l'abscisse x

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$ α est homogène à 1 vitesse

D'Alembert XVIII^e s.

Puis Euler l'étudie.

Daniel Bernoulli → son fondamental + harmoniques (mult. de la fréq)
→ écriture des sol° sous forme trigo.

Fourier 1807 s'y intéresse via l'éq de la chaleur en reprenant les résultats de l'éq des cordes vibrantes.

rejette le problème en discret mais ne prouve pas à la limite.
Ce n'est que plus tard qu'il écrit les coeff tels que nous les connaissons.

$f(x) = \sum a_n \cos nx + b_n \sin nx$ mais ne prouve pas l'écriture de ce dev (cvg de la série $\sum$ vers f !)

C'est Poisson puis Dirichlet qui définit les cond° de cvg adaptée aux f° continues par morceaux

Outils utilisés =

D l'espace des fonctions $f \in C^0_{pm, 2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{2}\left(f(x^+) + f(x^-)\right)$$

On peut y définir une application $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(t)}\, g(t)\, dt$
produit scalaire. (esp. hermitien complexe)

→ Si on utilise la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ $e_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto e^{inx}$ est orthonormée dans $(D, \langle,\rangle)$

Foncti° C^1_{pm} =

$f : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\exists\ a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ tq $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$

Suppl - Gourdon 5.1.e) p143

$\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad 0<|\lambda|<1 \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\theta \mapsto f(\theta) = \frac{1}{\lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1}$$

Déterminer la série de Fourier et étudier sa convergence.

→ def.

f paire.

calcul par récurrence ~~$a_{n+2}(f) + a_n$~~

lien entre a_{n+2} / a_{n+1} et a_n.

- utilisé par polyn. caract.

⊕ CN, somme de sa série.

---

f est C^1 sur $]a_i, a_{i+1}[$ et f et f' possèdent des limites finies à gauche et à droite en a_i et a_{i+1}

Théorème de convergence :

$\boxed{\text{Parseval}}$

$\forall f \in D$ alors les séries $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \,/\, \sum_{n=0}^{\infty} |a_n(f)|^2 \,/\, \sum_{n=1}^{\infty} |b_n(f)|^2$

convergent et on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)^2 = \frac{a_0(f)^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n(f)^2 + b_n(f)^2\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt$$

(noté $\|f\|_2^2$)

$\boxed{\text{Dirichlet}}$ $f \in C^1_{m,2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Alors la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers sa régularisée $\tilde{f}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\, e^{inx} = \tilde{f}(x)$$

ou $$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left((a_n(f)\cos nx) + (b_n(f)\sin nx)\right) = \tilde{f}(x)$$

Ex1 . Ap. de cours. ⊕ calcul de somme

a) coeff Fourier. f paire.

IPP $S(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos((2k+1)\pi)$

b) f $C^1_{p.m.}$ et C^0 sur $\mathbb{R}$

Dirichlet. cvg vers f, pour $x=0$

d) Parseval, $f \in D$, $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$

Ex2 1) f = fon $b_n(f)=0$

elg. rapide $u = \frac{t}{4}$

$a_n(f) - a_{n-1}(f)$ $\quad \cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$

$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right)$

$a_0(f) = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x} = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos(x)}{\cos^2(x)} dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{1-\sin^2(x)} dx$

$t = \sin x$,

Th de Parseval - f est 2π pér. et C^0 sur $\mathbb{R}$

$\sum_{n \geq 0} a_n(f)^2$ cvg $\Rightarrow$ $\lim a_n(f) = 0$

c) <u>Parseval</u>, pour le reste de la somme. et $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{\cos^2(\frac{t}{4})} = \left[4\tan\frac{t}{4}\right]_{-\pi}^{\pi} = 8$

Ex3 . Inégalité de Wirtinger

$\forall n \in \mathbb{Z}$ $c_n(f) = \frac{1}{in} c_n(f')$ ⊕ $\frac{1}{\#}$ $c_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0$

périodicité $c_0(f') = 0$

<u>Parseval.</u> Égalité des sommes, pour $n=1$ $f(t) = ae^{it} + be^{-it}$

$(a,b) \in \mathbb{C}$

Ex4 . Th d'intégral.

hypothèse forte de compacité à l'infini -

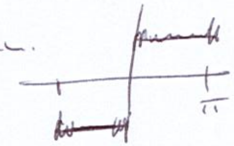
Q2 - fonction theta de Jacobi, utilisée par Riemann pour l'équation fonctionnelle de la fonction zeta de Riemann.

Ex5 Phénomène de Gibbs

Transformée de Fourier d'une f. discontinue

Pas de cvg uniforme de la somme de la série de Fourier au bord de la discontinuité.

→ ex. où le mém.



repose sur calcul de $\sum \cos((2k+1)t)$ cos somme géométrique

puis. cas intéressant pour faire apparaître 1 somme de Riemann. avec l'étude de maximum de la série -

2nd partie : étude de $S_n(x)$ dont c'est une série alternée, critère de CSSA. pour minorer le reste et mq $\lim_{n\to+\infty} \|S_n - f\| \geq \frac{2}{\pi} u_0 > 1$.

Ex 1 :

1°/ Parité de la fonction $f(-x) = f(x)$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $\underline{b_n(f) = 0}$

$\underline{n=0}$ $$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \pi \quad (\text{parité})$$

$\underline{n \in \mathbb{N}^*}$ $$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx.$$

(IPP) $$a_n(f) = \frac{2}{\pi}\Big[\underbrace{\Big[\frac{1}{n} x \sin(nx)\Big]_0^{\pi}}_{=0} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \sin(nx)\,dx\Big]$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} \sin(nx)\,dx = \frac{2}{n^2\pi}\Big[\cos(nx)\Big]_0^{\pi} = \frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n - 1\right)$$

→ si $n = 2k$ alors $a_n(f) = 0$

si $n = 2k+1$ alors $a_{2k+1}(f) = -\dfrac{4}{(2k+1)^2\pi}$.

La série de Fourier s'écrit alors

$$S(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k\geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2}\cos((2k+1)\pi)$$

2°/ Utilisation des gros théorèmes.

f est C^1 par morceaux (et continue sur $\mathbb{R}$)

[→ théorème de Dirichlet]

⇒ série de Fourier converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in [-\pi, \pi] \quad \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos((2k+1)\pi) = |x|$$

En particulier pour $x = 0$ $$\underline{\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$$

3°/ Astuce classique de décomposition

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} \quad (\text{pair} + \text{impair})$$

et $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p)^2} = \frac{1}{4} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2}$

d'où $\frac{3}{4} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{8} \Rightarrow \underline{\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6}}$

4°/ f est C^1_{pm} et C^0, donc on peut appliquer Th. de Parseval. ($f \in D$)

$$\left(\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n(f)^2 + b_n(f)^2\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\right)$$

donc $\frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2} \frac{16}{\pi^2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx$

et $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3}$ donc $\frac{8}{\pi^2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{12}$

et $\underline{\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}}$

5°/ Rien à faire pour $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$, $\underline{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}}$.

①

Exercice 2 $\quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \in [-\pi, \pi]$

$$f(x) = \frac{1}{\cos\left(\frac{x}{4}\right)}$$

~~2π périodique~~ $\cancel{f(x+2\pi) = \frac{1}{\cos\left(\frac{x+2\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\cos\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{2}\right)}}$

Calcul des coeff de Fourier.

$$f(-x) = \frac{1}{\cos\left(\frac{-x}{4}\right)} = \frac{1}{\cos\left(\frac{x}{4}\right)} = f(x) \text{ — paire.}$$

donc $\forall n \geq 1 \quad b_n(f) = 0$

$$\forall n \geq 0 \quad a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(nt)}{\cos\left(\frac{t}{4}\right)}\, dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos(nt)}{\cos\left(\frac{t}{4}\right)}\, dt$$

chgt variable $u = \frac{t}{4}$ donc $t = 4u$.

$$a_n(f) = \frac{8}{\pi}\int_0^{\pi/4} \frac{\cos(4nu)}{\cos(u)}\, du -$$

Utilisons l'indic de l'ex.

$$\forall n \geq 1 \quad a_n(f) - a_{n-1}(f) = \frac{8}{\pi}\int_0^{\pi/4} \frac{\cos(4nu) - \cos(4(n-1)u)}{\cos(u)}\, du.$$

$$\cos(4nu) - \cos(4(n-1)u) = -2 \sin\left(\frac{4nu + 4(n-1)u}{2}\right) \sin\left(\frac{4nu - 4(n-1)u}{2}\right)$$

$$= -2 \sin\left(4(n-2)u\right) \sin(2u)$$

$$a_n(f) - a_{n-1}(f) = \frac{8}{\pi}\int_0^{\pi/4} \frac{-2\sin((4n-2)u)\sin(2u)}{\cos u}\, du$$

$$= \frac{-16}{\pi}\int_0^{\pi/4} \frac{\sin((4n-2)u) \times 2 \times \sin u \times \cos u}{\cos u}\, du.$$

$$= \frac{-32}{\pi}\int_0^{\pi/4} \sin((4n-2)u) \sin u \, du$$

$$= \frac{-32}{\pi}\int_0^{\pi/4} \frac{1}{2}\left[\cos((4n-2)u - u) - \cos((4n-2)u + u)\right] du$$

$$= \frac{-16}{\pi}\int_0^{\pi/4} \cos((4n-3)u) - \cos((4n-1)u)\, du.$$

$$= -\frac{16}{\pi}\left(\frac{\sin\left((4n-3)\frac{\pi}{4}\right)}{4n-3} - \frac{\sin\left((4n-1)\frac{\pi}{4}\right)}{4n-1}\right) \qquad \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{8\sqrt{2}}{\pi}\times(-1)^n\left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-1}\right)$$

d'où $\forall n \geq 0 \quad a_n(f) = a_0(f) + \sum_{j=1}^{n} \frac{8\sqrt{2}}{\pi}(-1)^n\left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-1}\right)$

et $a_0(f) = \frac{8}{\pi}\int_0^{\pi/4}\frac{du}{\cos u} = \frac{8}{\pi}\ln(1+\sqrt{2})$ (1)

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{\cos x} = \int_0^{\pi/4}\frac{\cos x\,dx}{\cos^2(x)} = \int_0^{\pi/4}\frac{\cos x\,dx}{1-\sin^2(x)}$

on pose $t = \sin x$ / $dt = \cos x\,dx$

$= \displaystyle\int_0^{\sqrt{2}/2}\frac{dt}{1-t^2}\,dt$ décomp. fract. rationnelle

$$\frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)$$

d'où $= \frac{1}{2}\ln\left(\left|\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right|\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{(2+\sqrt{2})^2}{2}\right)$

$= \frac{1}{2}\ln\left(\left(\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^2\right) = \ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = \underline{\ln(1+\sqrt{2})}$

d'où $a_n(f) = \frac{8}{\pi}\ln(1+\sqrt{2}) + \frac{8\sqrt{2}}{\pi}\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\left(\frac{1}{4j-3} - \frac{1}{4j-1}\right)$ (1)

f est 2π-périodique, continue sur $\mathbb{R}$ –

$\Rightarrow$ th de Parseval

$\sum_{n\geq 0} a_n(f)^2$ converge donc $\lim_{n\to+\infty} a_n(f) = 0$

d'où $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty}(-1)^j\left(\frac{1}{4j-3} - \frac{1}{4j-1}\right) = \frac{\ln(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}$ (2)

2) On écrit de nouveau le th de Parseval.

$$\frac{16}{\pi^2}\ln^2(1+\sqrt{2})+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dt}{\cos^2\left(\frac{t}{4}\right)} \quad (3)$$

En utilisant (1) et (2)

$$a_n(f)=\underbrace{\frac{8}{\pi}\ln(1+\sqrt{2})}_{(a)}+\underbrace{\frac{8\sqrt{2}}{\pi}\left(-\frac{\ln(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}\right.}_{(b)}\left.+\sum_{j=n+1}^{\infty}(-1)^{j-1}\left(\frac{1}{4j-3}-\frac{1}{4j-1}\right)\right)$$

donc $\forall n\geq 0$

$$a_n^2(f)=\left(\sum_{j=n+1}^{\infty}(-1)^{j-1}\left(\frac{1}{4j-3}-\frac{1}{4j-1}\right)\right)^2$$

donc il reste à calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dt}{\cos^2\left(\frac{t}{4}\right)}=4\tan\frac{t}{4}\Big]_{-\pi}^{\pi}=8$

$$\text{donc }\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j=n+1}^{\infty}(-1)^{j-1}\left(\frac{1}{4j-3}-\frac{1}{4j-1}\right)\right)^2=\frac{\pi^2}{128}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dt}{\cos^2\left(\frac{t}{4}\right)}-\frac{32}{\pi^2}\ln(1+\sqrt{2})\right)$$

$$\text{———}=\frac{\pi}{16}-\frac{\ln^2(1+\sqrt{2})}{4}.$$

Exercice 3

En utilisant, la forme avec c_n.

$$c_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u)\, du = 0$$

et $c_0(f') = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(u)\, du = \frac{1}{2\pi}\left(f(2\pi) - f(0)\right) = 0$ car f 2π périodique

on utilise le th. de Parseval.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2 \right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx.$$

or $\forall n \in \mathbb{Z}^*$ $c_n(f) = \frac{1}{in} c_n(f')$

Par IPP $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$

$$= \frac{1}{2\pi}\Big(\underbrace{\left[-\frac{1}{in}\left(f(x)e^{-inx}\right)\right]_0^{2\pi}}_{=0} + \frac{1}{in}\int_0^{2\pi} f'(x) e^{-inx} dx$$

$$= \frac{1}{in} c_n(f')$$

d'où $\sum_{n=1}^{\infty}\left(|c_n(f)|^2 + |c_n(f)|^2\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|\frac{1}{in} c_n(f')\right|^2 + \left|-\frac{1}{in} c(f)\right|^2 \right)$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(|c_n(f')|^2 + |c_{-n}(f')|^2 \right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(u)|^2 du. \quad (1)$$

On applique Th de Parseval à f'.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(|c_n(f')|^2 + |c_{-n}(f')|^2 \right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f'(x)|^2 dx. \quad (2)$$

d'où $\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f'(x)|^2 dx.$

Il y aura égalité ssi on a l'égalité des sommes. Or que des nombres positifs donc $\forall n \in \mathbb{Z}^*$ $|c_n(f)|^2 = n^2 |c_n(f')|^2$

donc pour $|n| \geq 2$ $c_n(f) = 0$

f est de classe C^1, donc sa série de Fourier cv $(u_n f)$ vers f, donc égalité ssi $f(t) = ae^{it} + be^{-it}$, $(a,b) \in \mathbb{C}^2$

Ex 5 - 1°/ f est impaire donc $a_n(f)=0$

Calcul de $b_n(f)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nt)\,dt = \frac{2}{\pi n}\Big(-\cos(nt)\Big)_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right)$$

donc si $n=2p$ alors $b_{2p}(f)=0$

$n=2p+1$ alors $b_{2p+1}(f) = \frac{4}{\pi n}$

2°/ pour $t \notin \pi\mathbb{Z}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{4}{\pi(2k+1)} \sin((2k+1)t)$

$S_n(t)$ somme finie, on peut dériver terme à terme.

$$S_n'(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{4}{\pi(2k+1)} \times (2k+1)\cos((2k+1)t)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{4}{\pi}\cos((2k+1)t)$$

Transformation en passant en complexe

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{e^{i(2k+1)t} + e^{-i(2k+1)t}}{2}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi} e^{-i(2n+1)t} \sum_{k=0}^{2n+1} \left(e^{2ikt}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi} e^{-i(2n+1)t}\left(\frac{e^{2i(2n+2)t}-1}{e^{2it}-1}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi} e^{-i(2n+1)t}\, \frac{e^{i(2n+2)t}\left(e^{i(2n+2)t}-e^{-i(2n+2)t}\right)}{e^{it}\left(e^{it}-e^{-it}\right)}$$

$$= \frac{2}{\pi}\,\frac{\sin((2n+2)t)}{\sin(t)}$$

Variation de S_n sur $]0,\pi[$. On calcule $S_n'(x)$

sur $]0,\pi[$ $\sin t > 0$

$S_n'(t)$ s'annule à chaque changement de signe de $\sin((2n+2)t)$

ie soit $(2n+2)t = k\pi \to t = \dfrac{k\pi}{2n+2}$ $k \in [\![1, 2n+1]\!]$

donc $2n+1$ changements de signe.

$S_n'(t) > 0$ pour t proche de 0

donc S_n strict. croissante sur $]0, t_1]$

décr sur $]t_1, t_2]$

⋮

décroissante sur $]t_{2n+1}, \pi[$

On remarque que M_n est le max de S_n.

$S_n(t_1) = S_n(t_{2n+1}) > S_n(t_3) = S_n(t_{2n-1}) > \dots$

3) a) $M_n = S_n\left(\dfrac{\pi}{2(n+1)}\right)$

b) $M_n = S_n\left(\dfrac{\pi}{2(n+1)}\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{4}{\pi} \frac{\sin\left(\left(\frac{2k+1}{2n+2}\right)\pi\right)}{2k+1}$

↳ voir la forme de M_n avec $\int \to$ Riemann.

$a=0$, $b=\pi$ $\dfrac{b-a}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)$

$n-1 \to 2n+1$

donc $M_n = \dfrac{4}{\pi} \times \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n+2}\right)}{\frac{2k+1}{2n+2}\pi} \times \frac{\pi}{2(n+1)}$

$= \dfrac{2}{\pi} \times \dfrac{1}{(n+1)} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n+2}\right)}{\frac{(2k+1)\pi}{2n+2}}$.

$x_k = \frac{2k+1}{2n+2}\pi$ milieu du $k^{ème}$ intervalle de $[0,\pi]$ en $(n+1)$ intervalles

et le $k^{ème}$ terme de la somme est $g(x_k)$ avec $g(x) = \frac{\sin x}{x}$ pour $x \in]0,\pi]$

g se prolonge en 0 avec $g(0)=1$

d'où $\lim_{n\to+\infty} T_n = \lim_{n\to+\infty} S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx.$

b) On va montrer que $\lim_{n\to+\infty} (T_n)_n$ est > 1

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

Posons $\sum u_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin u}{u}\,du$, $k \in \mathbb{N}$.

alternée : sur $[k\pi, (k+1)\pi]$, u_k est du signe de $(-1)^k$.

décroissante : chgt variable $v = u - k\pi$

$$|u_k| = \int_0^{\pi} \frac{|\sin(v)|}{v+k\pi}\,dv > \int_0^{\pi} \frac{|\sin(v)|}{v+(k+1)\pi}\,dv = |u_{k+1}|$$

$\Rightarrow \sum u_k$ est 1 série alternée dont la somme vaut $\frac{\pi}{2}$

d'après le critère SSA. $u_0 > \frac{\pi}{2}$ (1er terme)

donc $\lim_{n\to+\infty} T_n = \frac{2}{\pi} u_0 > \frac{2}{\pi} \times \frac{\pi}{2} = 1$

donc $\lim_{n\to+\infty} \| S_n - f \| \geq \frac{2}{\pi} u_0 > 1$

la convergence n'est pas uniforme.

Soit $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, montrer l'équivalence

f de classe $C^\infty \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N} \quad c_n(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$ qd $|n| \to +\infty$

$\Rightarrow$ f de classe C^∞

Par IPP succ., $c_n(f) = \frac{1}{(in)^k} c_n(f^{(k)})$

Par suite $|n^k c_n(f)| = |c_n(f^{(k)})| \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$

car pour tout $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $(c_n(f))_n \to 0$ qd $|n| \to +\infty$ (csq de Parseval si $\sum |c_n(f)|^2$ cvg alors son tg tend vers 0.

$\Leftarrow$ On suppose $\forall k \in \mathbb{N} \quad c_n(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$ qd $|n| \to +\infty$

Soit $g(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$.

comme pour tout $k \in \mathbb{N}$ $c_n(f) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^k}\right)$, $\exists \alpha > 0$ telle que

$$|c_n(f)| \leq \frac{\alpha}{|n|^2+1} \quad \text{ainsi } \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$|c_n(f) e^{inx}| \leq \underbrace{\frac{\alpha}{|n|^2+1}}_{\text{tg d'1 série cvg}}$$

donc g est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs

$$|(in)^k c_n(f)| = |c_n(f^{(k)})| \leq \frac{\beta_k}{|n|^2+1}$$

pour 1 certaine constante β_k car $(n^{2+k} c_n(f) \underset{|n| \to +\infty}{\longrightarrow} 0)$. Par conséquent, toutes les séries cvg<u>t</u> normalement sur $\mathbb{R}$

ccl et g est une fct° C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Donc g est somme d'1 série trigo qui cvg. normalement (donc unif) et ainsi ses coeff de Fourier sont les coeff de la série trigo (ie) $c_n(g) = c_n(f) \; \forall n \in \mathbb{Z}$

Or 2 fonct° continues ont les mêmes coeff de Fourier sont égales donc $g = f$ et f est C^∞.