412 Exemple de développement d'une fonction en série entière.

Exercice 1 Calcul d'intégrale (Sorosina 3.15 p81)

Etablir que $\forall z \in \mathbb{C}$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \cos(zt)\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-\frac{z^2}{2}}$$

DSE dans l'intégrande

Interversion $\int$ et Σ

chgt variable $u = t^2$

IPP + récurrence + chgt variable

et $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Exercice 2 Résolution d'équations différentielles

Ramis Ana TII p 487

Déterminer les solutions de

$$(E_0) : y'' - xy = 0$$

développables en série entière en 0

Que dire de l'ensemble S_0

Analyse-synthèse

prop des coef des DSE

coef des candidats

identification par rapport à DSE de 0

synthèse base de solution.

Ou Sorosina Analyse p107 ex 4.15

(**Exercice 3** : Nombre de solutions d'une eq diophantienne

Sorosina ex 4.17 p109

Soit $p(d)$ le nombre de triplets

solutions dans $\mathbb{N}^2$ de $x+2y+3z = d$

avec $d \geq 0$

1°/ Mq $\forall t \in]-1,1[$

$$\sum_{d=0}^{+\infty} p(d)\, t^d = \frac{1}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)}$$

2°/ calculer alors $p(d)$ pour $d \geq 0$)

?

Produit de Cauchy

Decomp fract° rationnelles

! Technique pour la décomp

Exercice 3 : Delaunay Analyse MP, ex 16 p 38,

a) Former la DSE sur $]-1,1[$ de

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$$

Plutôt

Fract° rationnelles / dérivations

Produit de Cauchy.

b) En déduire une expression de

$a_n = \mathrm{Card}\{(j,k) \in \mathbb{N}^2 \mid j+2k = n\}$

Exercice 5 Dénombrement de parenthésages

Ramis Analyse p402

On note (a_n) le nombre de parenthésages sur un composé de n éléments $x_1, \dots x_n$ d'1 ensemble E muni d'1 loi de compo interne (non associative)

a) Mq $n \geq 2$ $a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$

b) On considère la SE $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$, on suppose que $R > 0$ et on note S sa somme

Mq $\forall x \in]-R, R[$ $(S(x))^2 - S(x) + x = 0$

c) a) Mq $f(x) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4x})$ est DSE en 0 et calculer son DSE(0)

b) En déduire $n \in \mathbb{N}^*$

$a_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$

DEV

Utilisation des SE dans pbs de dénombrements

- Nombres de Catalan

4/2 compléments.

* Delaunay Analyse MP

- Ex 16 p 381 $f(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$ / $a_n = \mathrm{card}\{(j,k) \in \mathbb{N}^2 \mid j+2k = n\}$

avec DSE / fract. rationnelle / produit de Cauchy.

- Ex 18 p 385 $f(x) = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$

existence d'1 suite de coeff (a_n) :

$\forall x \in]-1,1[\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$

Calculer les coeff avec 1 eq. diff.

En supplément :

* proba : Pallio p 586

rayon d'équation de la séquence pile-face

(cours dur) pour définir $\{T=n\}$ puis $P(T=n)$

à reformuler !

Dantzer, nombre d'arrangements de $[\![1,n]\!]$ / X-ENS Alg. T1 (ex 1.3)

pas trop difficile : produit de Cauchy.

+ TSSA. pour conclure

X-ENS T2 - Alg. lin ex 1.6 p 12

Calcul du déterminant :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$$

avec $a_0 = 1 \quad a_1 = \frac{1}{2} \quad a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}$

Calcul de déterminant par blocs.

produit de Cauchy.

Dvpt de $(1+x)^{\alpha}$.

Difficile

412 DSE

Ex 1 - en proba.

Ex 2 $\forall x \in]-1,1[\quad (1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$

Ex 3 :

$2 \sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$

$2 \sin^2 a = 1 - \cos(2a)$

Ex 5 - ~~Ex 5~~ dev.

Ex 5 - utilisation d'1 DSE via l diterminant.

$\boxed{\text{Ex 5 = Dérangement qui n'a aucun point fixe}}$ Dantzer **DEV**

1°/ $\sum_{n \geq 0} \frac{d_n}{n!} x^n$

d_n = card d'un sous-ensemble de S_n

$0 \leq d_n \leq n!$

donc $0 \leq \frac{d_n}{n!} \leq 1$

la suite $\left(\frac{d_n}{n!}\right)$ est bornée, le rayon de cvg de la série $\sum \left(\frac{d_n}{n!}\right) x^n$ est supérieur ou égal à 1

$\forall x \in]-1,1[\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n.$

② DSE de $e^x f(x)$, e^x est DSE $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

et $\sum_{n \geq 0} \frac{d_n}{n!} x^n$ sont abs. cvgt.

Produit de Cauchy = $e^x f(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n\right)$

$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{k!} \times \frac{1}{(n-k)!} \right) x^n.$

$= \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k \right)}_{c_n} x^n.$

Montrons que $c_n = 1$

$n=0$, ok

$n \in \mathbb{N}^*$, $k \in [\![0,n]\!]$, on pose $I_k = \{$permutations ayant k points fixes$\}$

$I_k \cap I_{k'} = \emptyset$ et $\bigcup_{k=1}^{n} I_k =$

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Card}\, I_k$$

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} d_k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k \longrightarrow \text{d'où } e^x f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

$$= \frac{1}{1-x}$$

DSE de $f(x)$: $f(x) = e^{-x} \dfrac{1}{1-x} = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right) x^n$$

Par unicité de ~~la dévelop~~t DSE.

$$\frac{d_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \quad \text{soit } d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

3°/ TSSA. $\left| \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \right| \leq \dfrac{1}{(n+1)!}$

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\left| n!\, e^{-1} - d_n \right| \leq \frac{1}{(n+1)} \leq \frac{1}{2} \text{ si } n \geq 1$$

$(\times n!)$

$$-\frac{1}{2} \leq n!\, e^{-1} - d_n \leq \frac{1}{2}$$

$$d_n \leq n!\, e^{-1} + \frac{1}{2} \leq d_n + 1$$

e est irrationnel et $d_n \in \mathbb{N}$ donc $d_n \leq n! e^{-1} + \frac{1}{2} < d_n + 1$

donc $d_n = E\left(n!\, e^{-1} + \frac{1}{2}\right)$