411 Exemple d'études de fonctions définies par une série ①

Intro – étude des points suivants.

1) convergence simple, uniforme, normale → définie ?
2) Étude de la somme / limite de la somme.
3) régularité, continuité – dérivabilité.
4) comportement asymptotique.
5) Allure de la courbe.

Ex 1 – Caractère borné d'une fonction. Romain Analyse TP ex 5.3.5 p325

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite complexe tq $\forall n\in\mathbb{N}$ $|a_n|\leq 1$ et la fonction
$\forall n\in\mathbb{N}$ $f_n : \mathbb{R}\to\mathbb{C}$
$x\mapsto a_n e^{-|x-n|}$

a) Étudier la convergence simple de $\sum_n f_n$.

b) Mq $\forall x\in\mathbb{R}$ $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right| \leq \frac{2e}{e-1}$

Idée – CS, série géom., vérif de la cvg
difficulté 2 cas $x<0$ et $x>0$ puis $\exists N\in\mathbb{N}$ tq $N<x\leq N+1$

Ex 2 – Étude plus théorique, limite en 0 d'une somme. Gourdon Analyse p68 p287

Soit $g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ fonction continue, convexe avec $\lim_{x\to\infty} g(x)=0$

a) Mq $S:]0;+\infty[\to\mathbb{R}$
$h\mapsto \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n g(nh)$ est bien définie.

b) Mq $\lim_{h\to 0^+} S(h) = \frac{g(0)}{2}$

Idée. CS, convexité, série alternée. majoration d'un reste d'une série alt.
2 pts importants convexité et série alternée. pour cvg et maj
Idée. introduire $A_n(h) = g(nh) - g((n+1)h)$
pour étudier $R(h) = \frac{1}{2}\sum_0^{\infty}(-1)^n A_n(h)$.

Ex 3 Régularité d'une fonction et étude complète — Freslon 9.5 p189

Pour $x \in \mathbb{R}_+$, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$

1°/ Mq S est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$

2°/ S est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$

3°/ S pas dérivable en 0. On montrera que $\frac{S(x)}{x}$ possède une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ qd $x \to 0$

Idée = différents cvg. – th pour C^1 (CVS + CU sur tout segment $\subset \mathbb{R}_+^*$ de C^1)
utilisation de la série harmonique
pour minorer la limite pour passage à $\frac{S(x)-S(0)}{x-0}$

Ex 4 Fonction ζ de Riemann. — Freslon ex 9.4 p180 — Delaunay — Rouix MP ex 5.3.1 n) p324

Pour $x \in]1,+\infty[$, $\zeta(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$

1°/ Mq ζ est bien définie et continue sur $]1,+\infty[$

2°/ ζ est de classe C^∞ sur $]1,+\infty[$

3°/ Variation de ζ et convexité

4°/ Limite en $+\infty$ et 1^- et allure de la courbe.

Ex 5 Fonction continue nulle part dérivable — Rudin p166

$g : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ prolongée sur $\mathbb{R}$ en posant $g(x+2) = g(x)$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n g(4^n x)$

1) En notant f_n tel que $\sum_{n=0} f_n$, mq f est continue

2) Soit $x \in \mathbb{R}$, le but est de montrer que $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ne tend pas vers 0 qd $\lim_{h \to 0}$.

a) Mq $\exists\, h_n = \pm \frac{1}{2}\frac{1}{4^n}$ tel qu'il n'existe aucun entier relatif dans l'intervalle ouvert $]4^n x, 4^n(x+h_n)[$

b) Mq $\forall h > k$ $g(\varphi^{\ell}(x+h_n)) - g(\varphi^{\ell}x) = 0$) inutile

c) ~~Etudier~~ ~~g~~ Mq $\varphi^{\ell}(x+h_n)$ et $\varphi^{\ell}x$ sont sur un intervalle où g est affine à pente soit 1 ou -1

d) conclure

Gourdon - $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Ex 5 p 276 Gourdon

$$x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$$

1) déf, 2π-pér et C^0

2/ Rq coeff de Fourier st tq $\sum |n\, b_n(f)|^2$ cvg ms f pas dérivable en 0.

$g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fc continue, convexe tq $\lim_{+\infty} g(x) = 0$

a) mq $S :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$

$$h \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n g(nh) \text{ est bien déf}$$

b) $\lim_{h \to 0^+} S(h) = \frac{g(0)}{2}$

a/ série alternée, décroissante.

convexe $\to$ posit. % corde.

b/ utilisat. de la convexité, regroupt. des termes.

Utilisat. du th Radial d'Abel -

411. Exemple d'étude de fonctions définies par une série.

Monier 4 — Gourdon

Dans de nombreux cas, on introduit la somme d'une série de fonctions.

intro [Exemples d'étude : ① Convergence : CS, CU, CN. ② Étude de la somme : limite de la somme ; régularité : continuité, dérivabilité ; développement asymptotique* ; allure de la courbe.
*local (au voisinage d'un pt).

Ex 1 : Caractère borné. M4 ex. 4.3.5 p 51.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que ($\forall n\in\mathbb{N}$, $|a_n|\leq 1$), et pour $n\in\mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto a_n e^{-|x-n|}$

a) Étudier la convergence simple de $\sum_n f_n$.

b) Montrer : $\forall x\in\mathbb{R}$, $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right| \leq \frac{2e}{e-1}$

Prérequis : CS, série, série géom.
Int : fait réviser la cv de séries numériques peu de prérequis → début de leçon
(Vérifier qu'il n'est pas défaut de la majoration).
Diff : 2 cas, $x<0$, $x\geq 0$
penser à $\exists N$: $N<x<N+1$.

Ex 2 : Étude de la limite en 0 de la somme. G. pb 8 p 272

Soit $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue, convexe, tq $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

a) Mq la fonction suivante est bien définie :
$S :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $h \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n g(nh)$

b) Mq $\lim_{h\to 0^+} S(h) = \frac{g(0)}{2}$.

Prq : CS, fonction convexe, série alternée, majoration.
Int : exo de révision fonction convexe et série alternée.
Réinvestissement mais peu de connaissances sur les fonctions donc exo ① en début de chapitre.
Dif : fonction convexe. Ind° b) : On pourra étudier la cv de $\sum_{n\geq 0} (-1)^n A_n(h)$, avec $A_n(h) = g(nh) - g((n+1)h)$.

Ex 3 : Un équivalent de la somme. M4 ex 4.3.8 p 51

a) Étudier les convergences de $\sum_{n\geq 0} f_n$, où $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-x\sqrt{n}}$

b) On note $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$;
donner un équivalent de S lorsque $x \to 0^+$

Prq : ≠ convergences, comparaison $\sum$, $\int$, $\int$ généralisée, chgt variable.
Int : entraînement sur ≠ cv classique, réinvestissement intégrales.

Ex 4 : Régularité M4 ex 4.3.7 p 51

a) Étudier les convergences de $\sum_{n\geq 1} f_n$, où $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x}{n(1+n^2x)}$

b) On note $S = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$. Mq S est continue sur $\mathbb{R}_+$ et C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) S est-elle dérivable en 0^+ ?

Prq : ≠ convergences, thm C^1.
ⓒ difficile, ⓐⓑ entraînement
ⓒ : pb de limite et minoration.

Ex 5 : Fonction ζ de Riemann M4 | 4.3.34 p64 | 4.3.21 p56 (dvt 269)

Soit $\zeta :]1;+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

a) Mq ζ est C^∞, décroissante et convexe sur $]1;+\infty[$.

b) Mq $\zeta(x) - 1 \underset{+\infty}{\sim} 2^{-x}$

c) Pour $x>0$, on note $I(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t - E(t)}{t^{x+1}}\,dt$.
- Établir : $\forall x\in]1,+\infty[$, $\zeta(x) = \frac{x}{x-1} - x\,I(x)$
- En déduire $(x-1)\zeta(x) \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} 1$

d) Tracer l'allure de la courbe représentative de ζ

Prq : thm C^∞, compar. $\sum$, $\int$ parou, intégrale généralisée.
Int : ⓐ et ⓑ réinvestissement de cours
ⓒ exo de recherche
(Si on rajoute au début les ≠ modes de cv, ça devient un exo de synthèse)
Difficulté ⓒ : $\int_1^n = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1}$ à cause de $E(t)$.

Rabe sur ζ : Pommellet p 192
G p 298, Sor p 76