410 Comparaison, sur des exemples de divers modes de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions.

Exercice 1 TEU ex 12 p510 (corr p535) MP*

On pose pour tout entier $n > 0$, la fonction f_n définie par

$$f_n :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{nx^2+1}{nx+1}$$

Etudier les convergences simple, uniforme et uniforme au voisinage d'un point.

Exercice 2 Tout en Un MP* p556 / Gourdon Ex 4 p238

théorèmes de Dini.

a) Soit (f_n) suite croissante de fonction réelles continues et définies sur un segment $I = [a,b]$ de $\mathbb{R}$. Si (f_n) converge simplement vers une fonction f continue sur I, montrer que la convergence est uniforme

b) Soit (f_n) suite de fonctions croissantes réelles et continues, définies sur un segment $I = [a,b]$, si (f_n) converge simplement vers f continue sur I, montrer que la convergence est uniforme.

Exercice 3 Monier p 324 Analyse MP

Etudier les différents modes de convergence de la série d'application $\sum_n f_n$

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f_n(x) = n^2(x^{2n} - x^{2n+1})$$

Exercice 4 Gourdon Analyse p 236

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit l'application

$$u_n : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \frac{x}{n^2+x^2}$$

a) Montrer que la série de fonctions $\sum_n u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers une fonction continue f mais que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}_+$

b) Montrer que la série de fonctions $\sum_n (-1)^n u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ tout entier mais que la convergence n'est pas normale sur $\mathbb{R}_+$

Exo 1

Progr. résultat sur suite et séries numériques dans $\mathbb{R}$

Th spécial des séries alternées

Compact de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

Convergence d'1 suite de fcts continues vers f.

résultat sur série de Riemann.

Exo 1 → 1) équivalent pour CS

2) étude de f_n $g = f - f_n$ pour le second.

montrer qu'elle ne converge pas unif. sur $\mathbb{R}_+$

mais sur $[a, +\infty[$ converge unif.

$a > 0$

Ex 2 → ex plus théorique pour affaiblir les hypothèses de convergence

des (f_n) vers une fct. f continue

pas de CU.

→ si (f_n) suite croissante de f° $\mathbb{R}$ continue

⊕ CS | converge unif. $f_n \to f$

→ (f_n) suite de fct° croissantes et continues

déf sur $I = [a, b]$

$(f_n) \xrightarrow{CS} f$ CU

→ (f_n) croissante et cv.

$g = f - f_n$ g continue, décroissante → 0

Absurde CU vers 0

si pas, on construit une suite

B.W.

Ex 3

Règle de d'Alembert

CS

CN tableau de variation $f_n(x) \to f'_n(x)$

x	0		$2n/(2n+1)$		1
f'_n		$+$	0	$-$	
f_n	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

$$\|f_n\|_\infty \sim \frac{n}{2e} \to +\infty$$

$a \in [0,1[$ fixé $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ \frac{2n}{2n+1} \geq a$

$$\sup_{x \in [0,a]} |f_n(x)| = f_n(a)$$

CN sur $[0,a]$

CU $\|f_n\|_\infty = \frac{n}{2e}$ donc $\|f_n\|_\infty \not\to 0$

pas de convergence uniforme

CU sur $[0,a]$

$a \in [0,1[$ fixé

Exo 4

Plus de rappel.
| CS pour ...
| CU $\|R_n\|_\infty \to 0$

Th Dini

$f_n \xrightarrow{cs} f$ alors CU.

f_n suite croissante à valeurs dans C

~~$g_n = f - f_n$ $g_n \to 0$~~

(f_n) est croissante et convergente. f_n et f continues

donc $g = f - f_n$ pour $n \in \mathbb{N}$

g est continue et positive

$\to (g_n)$ suite décroissante de f° continues

qui converge vers 0

Par l'absurde, CU vers 0

supposons $\exists \varepsilon > 0$ tel que pour $\forall k \in \mathbb{N}$ $\exists$ $(n_k > k)$ et un $(x_k$ de $k)$

tel que $g_{n_k}(x_k) > \varepsilon$

compacité et donc Th.

Bolzano-Weierstrass $\exists x \in [a,b]$

et φ une extraction $x_{\varphi(k)} \xrightarrow[k \to +\infty]{} x$

posons $\psi(k) = n_{\varphi(k)}$ $\psi(k) \geq \varphi(k) \geq k$ par croissance

donc $\psi(k) \to +\infty$

Convergence simple (g_k)

$g_{\psi(k)}(x) \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$

$$\boxed{\exists k_0 \in \mathbb{N} \quad g_{\psi(k_0)} \leq \frac{\varepsilon}{2}}$$

par continuité des $g_{\psi(k_0)}$

$\exists \eta > 0$ tel que $\forall y \in [a,b]$ $|x - y| \leq \eta$ $g_{\psi(k_0)}(y) \leq y$

comme $x_{\psi(k)} \xrightarrow[k \to \infty]{} x$

$\exists k \geq k_0$ tel que $|x_{\psi(k)} - x| \leq \eta$

$\varepsilon < g_{\psi(k)}(x_{\psi(k)}) \leq g_{\psi(k_0)}(x_{\psi(k)}) \leq \varepsilon$

2)

f limite simple de f_n croissantes

→ croissante

$\varepsilon > 0$ $\qquad$ f continue sur le compact I

Heine Unif continue

$$\exists \eta > 0 \ \forall (x,x') \in I^2 \ |x - x'| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

subdivision $a = x_0 < \dots < x_p = b$ de I de pas $< \eta$.

$$|x_{i+1} - x_i| < \eta.$$

la suite $f_n(x_i) \to f(x_i)$

~~$\forall i \in [\![0,p]\!] \quad |f_n(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon$~~

$$\exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ \forall i \in [\![0,p]\!] \ |f_n(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon \ ①$$

soit $x \in I$. $\exists \, i \in [\![0,p-1]\!] \ x \in [x_i, x_{i+1}]$.

(f_n) et f croissantes

$$f_n(x_i) \leq f_n(x) \leq f_n(x_{i+1})$$

$$f(x_i) \leq f(x) \leq f(x_{i+1})$$

donc $f(x_i) - f_n(x_{i+1}) \leq f(x) - f_n(x) \leq f(x_{i+1}) - f_n(x_i)$ ⊗

$$|f(x_{i+1}) - f_n(x_i)| \leq |\underbrace{f(x_{i+1}) - f(x_i)}_{\text{continuité}} + \underbrace{f(x_i) - f_n(x_i)}_{①}|$$
$$\leq 2\varepsilon$$

$$|f(x_i) - f_n(x_{i+1})| < 2\varepsilon.$$

avec ⊗ $|f(x) - f_n(x)| < 2\varepsilon$.

donc $\underline{CU}$

Ex 3

$[0,1] \to \mathbb{R}$

$f_n : x \mapsto n^2 (x^{2n} - x^{2n+1})$

sur $x \neq 1$ ok

CS sur $[0,1[$ $\quad \sum n^2 (x^{2n} - x^{2n+1})$ converge

règle d'Alembert

critère d'Alembert

et $\sum f_n(0)$ converge

CN

$$f_n'(x) = n^2 \left(2n\, x^{2n-1} - (2n+1)\, x^{2n} \right)$$

$= 0 \qquad = 1$

Etude de fonction

x	0		$\frac{2n}{2n+1}$		1
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

$$\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{2n}{2n+1}\right) = \frac{n^2}{2n+1}\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{-2n} \sim \frac{n}{2e} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

$a \in [0,1[$ fixé et $N \in \mathbb{N}$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \Rightarrow \frac{2n}{2n+1} \geq a$$

$$\forall n \geq N \quad \cancel{\sup_{x \in} |f_n(x)|} \quad \sup_{x \in [0,a]} |f_n(x)| = f_n(a)$$

$$\sup_{x \in [0,a]} |f_n(x)| = f_n(a)$$

3) Convergence uniforme.

$$\|f_n\|_\infty = \frac{n}{2e} \quad \text{donc} \quad \|f_n\|_\infty \not\to 0$$

~~fixé~~

CU [illegible], convergence uniforme $[0,a]$ $a \in [0,1[$

Ex 1

$f_n :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{nx^2+1}{nx+1}$

CV pple $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$f_n(x) = \frac{nx^2+1}{nx+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{nx^2}{nx} \underset{+\infty}{\sim} x$$

(f_n) cs vers $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+}$

CU : $n \in \mathbb{N}^*$ $g_n(x) = x - f_n(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$$g_n(x) = x - \frac{nx^2+1}{nx+1} = \frac{nx^2+x-nx^2-1}{nx+1}$$

$$= \frac{x-1}{nx+1}$$

$g_n \in C^1(\mathbb{R}_+)$

$$g_n'(x) = \frac{n+1}{(nx+1)^2} \qquad \frac{nx+1-(x-1)n}{(nx+1)}$$

x	0	$+\infty$
g'	$+$	
g	$\underline{-1}$ $\nearrow$	$1/n$

$\forall n>0$ g_n est bornée et $\|f_n - f\|_\infty = \|g_n\|_\infty = 1$

pas de convergence uniforme

cvg unif sur $[a,+\infty[$ $a>0$

$x \in]0,+\infty[$ alors $[\frac{x}{2};+\infty[$ est 1 voisinage de x

$n>0$ g_n est bornée sur $[a,+\infty[$

$$\sup_{x \in [a, +\infty[} |g_n(x)| = \max \left\{ |g_n(a)|, \frac{1}{n} \right\}$$

$$= \max \left\{ \left| \frac{a-1}{nan+1} \right|, \frac{1}{n} \right\} \xrightarrow[+\infty]{} 0$$

cvg unif. en tout pt de $\mathbb{R}_+^*$

$n \in \mathbb{N}^*$, $u_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{x}{n^2+x^2}$

Ex 4

a) <u>CS</u>

$\dfrac{x}{n^2+x^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{x}{n^2}$ donc cô somme de Riemann $\alpha > 1$ cvg

alors $\sum_{n\geq 1} \dfrac{x}{n^2+n^2}$ converge

<u>CU</u> . problème pas de convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$. On va trouver un x pour lequel $\sup$ les $\|R_n\|_\infty \not\to 0$

R.C.

$$\forall x > 0 \ \forall p \in \mathbb{N}^* \ \sum_{n=p+1}^{2p} \frac{x}{x^2+n^2} \geq \sum_{n=p+1}^{2p} \frac{x}{\underbrace{x^2+(2p)^2}_{\text{ne dépend plus de } n}} = \frac{\overset{p \text{ termes}}{p}\, x}{x^2+4p^2} \quad (1)$$

$(n=2p)$

si ~~$x = p$~~ alors $\forall p \in \mathbb{N}^* \ \exists x > 0 \ (x=p)$ $\sum_{n=p+1}^{2p} \dfrac{x}{x^2+n^2} \geq \dfrac{p^2}{p^2+4p^2} = \dfrac{1}{5}$

Non convergence

donc la série de fonctions ne converge pas car pas vérifié le critère de Cauchy uniforme sur $\mathbb{R}_+$

$\rightarrow$ Continuité de la limite simple de $\sum u_n$ sur $\mathbb{R}_+$ (cvg unif sur $\mathbb{R}_+$ entier) CU sur $\mathbb{R}_+ \to$ ok.

Montrons que f est continue sur tout segment $[0, \Pi]$ $\Pi > 0$

ce qui assurera la continuité sur $[0, +\infty[$

continuité CU sur $[0,\Pi]$

Soit $\Pi \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in [0, \Pi] \quad |u_n(x)| \leq \frac{\Pi}{n^2}$$

or la série $\sum \dfrac{\Pi}{n^2}$ cvg donc $\sum u_n$ converge normalement

donc unifmt sur $[0, \Pi]$.

f est limite uniforme d'1 suite de fonctions continues sur $[0, \Pi]$
donc est continue sur $[0, \Pi]$

b) si on fixe $x \geq 0$ $\sum (-1)^n u_n$ est 1 série alternée

et $|u_n|$ décroit, donc la série converge par le th spécial des séries altern.

Utilisons ce théorème, pour majorer les restes.

restes sont majorés en valeur absolue par la ~~premier terme~~ valeur absolue du premier terme.

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad \boxed{|R_{n-1}|} = \left| \sum_{n=p}^{+\infty} (-1)^n \frac{x}{x^2+n^2} \right| \leq \frac{x}{x^2+p^2} = a_p$$

$$\text{et} \quad \frac{x}{x^2+p^2} \leq \frac{\sqrt{x^2+p^2}}{x^2+p^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2+p^2}} \leq \frac{1}{p}$$

cette majoration est indep de $x \geq 0$

donc $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ CU vers 0 sur $\mathbb{R}_+$

donc la série de fcts $\boxed{\text{CU sur } \mathbb{R}_+}$

convergence normale ?

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\sup\limits_{x \geq 0} u_n(x) \geq u_n(n) = \frac{1}{2n}$ et on reconnaît la série harmonique qui diverge

$\boxed{x = n}$

$\sum \frac{1}{2n}$ donc pas de convergence normale

Se ramener à l'intervalle $[0, n]$

1

410 | Mode de convergence d'1 suite de fcts
d'1 série de fcts

E un Ktev de dim finie, norme $\|.\|$
et $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I Suites d'appli $(f_n : X \to E)_{n\in\mathbb{N}}$

1) convergence simple $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{CS} f$

2) convergence uniforme de $f_n \to f$ si

$\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N}\ \forall x\in X$
$n\geq N \Rightarrow \|f_n(x)-f(x)\|\leq\varepsilon$

A) $\boxed{CU \Rightarrow CS}$

B) CU ssi $\forall n\geq N$, $f_n - f$ bornée
$\|f_n - f\|_\infty \to 0$

$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X}\|f(x)\|$

$\overline{X}$ adh $a\in\overline{X}$. $f_n : X\to E$ suite d'appli.

si $\forall n\in\mathbb{N}$ ~~[illegible]~~ $f_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} l_n$

$f_n \xrightarrow{CU} f$.

alors $\begin{cases} (l_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ cvg} \\ f \text{ adm 1 lim en } a \\ \lim_a f = \lim_{n\to\infty} l_n \end{cases}$

Convergence unif et continuité

$\begin{cases} \forall n\in\mathbb{N}\ f_n \text{ est continue en } a \\ (f_n)_n \text{ CU sur } X \text{ vers } f. \\ \text{alors } f \text{ est continue en } a \end{cases}$

idem sur I intervalle de $\mathbb{R}$

X ensemble non vide

II Série d'applications

$\left((f_n)_{n\in\mathbb{N}}\ \text{et}\ (S_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ 1 suite d'appl. et la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\forall n\in\mathbb{N}\quad S_n=\sum_{k=0}^{n} f_k$

(S_n) n^{e} somme partielle

Types de convergence

A) CS

$\sum_{n\geq 0} f_n$ CS vers f ssi les sommes partielles (S_n) CS sur X.

Reste d'ordre n : $R_n : X \to E\quad \forall x\in X\quad R_n(x)=\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$

Somme de l'appl. $\forall x\in X\ \left(\sum_{k=0}^{+\infty} f_k\right)(x)=\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$

B) cvg absolue

$\sum_{n\geq 0}\|f_n(x)\|$ cvg. dans $\mathbb{R}$

c) C. uniforme

$\sum_{n\geq 0} f_n$ cvg U. ssi (S_n) ~~CU~~ sur X.

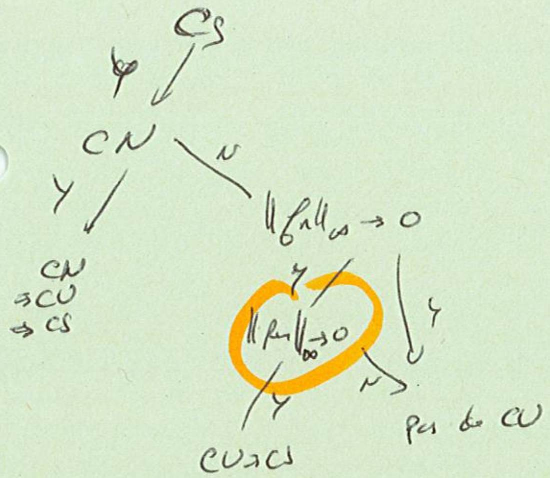
Prop $\sum f_n$ cvg unif $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}\text{série } \sum_{n\geq 0} f_n \text{ cvg. simplement sur } X\\ \text{suite } (R_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ cvg unif vers } 0 \text{ sur } X\end{cases}$

d) C. Normale

$\sum(f_n)$ cvg normalement sur X, $\exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N}\ n\geq N\Rightarrow f_n\in \underset{\text{borné}}{\underline{B(X,E)}}$

$\sum_{n\geq N}\|f_n\|_\infty$ converge.

$\sum_{n\geq 0} f_n$ CN $\nearrow \sum_{n\geq 0} f_n$ CA $\Rightarrow$ / $\Rightarrow \sum_{n\geq 0} f_n$ CU $\nearrow$ $\sum_{n\geq 0} f_n$ CS



Si $\|f_n\|_\infty \not\to 0$, $\sum f_n$ CV̸

↳ de étude de CU.
– Pas de cvg normale
– $\|f_n\|_\infty \to 0$

→ étude du reste

Critère de Cauchy unif.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ déf. sur 1 ens. X à valeurs dans 1 espace métr. (E,d)

$$\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N\ \forall p\geq N\ \sup_{x\in X} d(f_n(x), f_p(x))\leq\varepsilon$$

Critère d'Abel unif.

(f_n) suite de f. à valeurs dans 1 evn complet $\mathbb{F}$ / déf. sur I
(g_n) suite de f. à valeurs réelles.

1) $\exists M>0\ \forall n\in\mathbb{N}\ \forall x\in I\ \left\|\sum_{p=0}^{n} f_p(x)\right\|\leq M$

2) (g_n) CU sur I vers 0 en décroissant.

Alors $\sum_{n\geq 0} g_n f_n$ CU sur I.