409) Utilisation de polynômes en analyse

Difficile

1) Polynômes orthogonaux (méthode de Gauss)

| Analyse pour Ex 51 p 418 Pallu
| X-ENS Analyse 2, 1.15 (−)

2) Bernstein Ex 20.3 Rombaldi p286 (? calculatoire)

3) Th de Weierstraß – par Bernstein

formule sommation d'Euler MacLaurin

Polynôme de Taylor...

→ ~~Simpson avec polynôme d'interpolation de Lagrange~~

– Méthode de Simpson par polynômes de Lagrange

1) Weierstraß et approx d'1 fonction continue
2) Méthode de Simpson pour calcul approché d'1 intégrale (+)
3) Norme sur $\mathbb{R}[X]$ $\|P\| = \sum_{k\geq 0} |P^{(k)}(0)|$
4) Approx de Gauss (5)
5) Série de Fourier et f somme d'1 série de polynômes trigo.
6) Taylor et DL

↑ long et assez compliqué

2) TEU TP 10.23 p 562 – / Sorosina p178 Analyse ex 7.10.5

Weierstraß

$\forall x\in[-1,1]$ $\forall n\in\mathbb{N}$, $P_n(x) = (1-x^2)^n$ $a_n = \int_{-1}^{1} P_n$ et $Q_n(x) = \frac{P_n(x)}{a_n}$

1) a) déduire que $a_n \geq \frac{2}{n+1}$

b) $\alpha \in]0,1[$, (Q_n) cv unif vers $f=0$ sur $[\alpha,1]$

2) f $C^0(\mathbb{R})$ nulle hors $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$.

$\forall x \in \mathbb{R}$ $f_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x-t)\, Q_n(t)\, dt$

a) Dm $f_{n[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}$ est polynomiale.

b) (f_n) CU vers f sur $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$

c) En déduire une démo du th de Weierstraß.

3) Approx de calcul intégral par la méthode de Simpson, avec polynômes de Lagrange

Kefiane p277 / dev 22 (+) question !!.

4) ~~Inégalité de Kolmogorov X-ENS Analyse T1, ex 4.3.6 p259~~
~~→ Taylor-Lagrange (Question 1 unique)~~

Gourdon Analyse
ex 2.8 p 228

compléments utilisation de polynômes pour dvpt limité (Taylor)

5) ~~D'Alembert Gauss~~.

6) Soit $f : I \to I$ $\quad I = [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ Gourdon p155 Analyse 7.22.5

$$f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{\ln(1+x)}{1+x}\right)$$

1) mq f admet une réciproque f^{-1} sur I

2) mq f^{-1} admet 1 DL à tout ordre en 0
$DL_4(0)$ de f^{-1}

7) Polynômes et normes Analystan ex 65 p155

$\mathbb{R}[X]$ $\quad ||P|| = \sum_{k \geq 0} |P^{(k)}(k)|$

ou X-ENS Analyse 3
p 129
avec norme aussi.
(fait en exo)

1) c'est une norme

2) (P_n) $\quad P_n^{(k)}(k) = 2^{-k}$, espace normé pas complet