408. Etudes de séries $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ non abs. cvg.

Exercice 1 Utilisation du TSA Monier p251 (TIP)

Déterminer la nature de la série de tg $u_n = \frac{(-1)^n \ln n}{n}$

pas d'abs. cvg $\frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n}$
pb décroissance.
étude de $\frac{\ln x}{x}$
suite décroiss. TSA

Exercice 2. Transformée d'Abel Monier A4.7 Analyse TII p 286

$\forall \theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, $\alpha \in]0,1]$, montrer que la série $\sum \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ converge

(cf développé)
identique

Exercice 3. Théorème d'Abel pour les SE. Analyse p71/84

(Dev)

Soit $\sum a_n x^n$ série entière avec $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $R = 1$ sur $\mathbb{R}$.

Soit f la somme de la série. On suppose que $\sum a_n$ cvg

a) Mq $\sum_{k=n+1}^{p} a_k x^k = r_n x^{n+1} + \sum_{k=n+1}^{p-1} r_k (x^{k+1} - x^k) - r_p x^p$

avec $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ pour $p \geq 2$

b) Mq la série $\sum a_n x^n$ cvg uniformément sur $[0,1]$

c) En déduire que f est continue

d) Mq $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$

Exercice 4 Pour développer ex. 1 – X-ENS An 1 3.27 p 169 + Monier

1) Mq la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{\ln p}{p} - \frac{1}{2} \ln^2 n \quad \text{converge}$$

2) En déduire la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$

Exercice 5 : Produit de Cauchy   Rama RP 6.3.32 p283

a) Montrer que le produit de la série semi-cvg $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ par elle-même est 1 série dvg

b) Mq le produit de la série semi-cvg $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ par elle-même est 1 série cvg

Se méfier du produit !

408. compléments

- Développt asymptotique

$$\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$$

Monier p252 (ex) pas TSSA !
étude de chacun des termes du DL.

- Série de Riemann alternée

cvg de $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$

Monier Analyse PC* p250
$0 \leq \alpha \leq 1 \to$ TSSA !

- Calcul de la somme $\sum \frac{\sin nx}{n}$ $x \in]0, \pi[$

Rombaldi O2 p255
avec étude de $f(x,t)$ CU sur $[a,b]$