# 407 : Exemples d'évaluation asymptotique de restes de séries cvg, sommes partielles de séries dvg.

**Idée** : approcher un nombre donné par une suite ou une série. Une évaluation des restes permet d'améliorer le calcul. On utilise le théorème de comparaison. (Monier An. MP p 265)

**Exercice 1** : Equivalents, l'application TEU T1P Ex8 p413

1°/ Donner selon $\alpha > 0$, la nature de la série
$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$$

2°/ Lorsqu'elle diverge, donner un équivalent simple de ses sommes partielles

3°/ Lorsqu'elle converge, donner un équivalent simple de ses restes.

Série de Bertrand dans le cas $\alpha = 1$
comparaison série - $\int$ pour encadrement.

**Exercice 2** : Convergence et équivalent du reste Gourdon An. ex5 p221

1) Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$, fonction de classe $C^1$ vérifiant
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = -\infty$$
Mq $\sum f(n)$ cvg et donner un équivalent de $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} f(k)$ quand $n \to +\infty$

2°/ En déduire que $\sum e^{-n^2}$ converge et $\sum_{n}^{+\infty} e^{-p^2} \sim e^{-n^2}$

pt difficile
$\ln \frac{f(n+1)}{f(n)} = \int_n^{n+1} \frac{f'(x)}{f(x)} dx$
puis négation.

**Exercice 3** : Relations séries - restes - sommes partielles

$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ série à termes $>0$ Gourdon Ex 6 p221

1°/ a) Si $\sum u_n$ dvg. discuter selon les valeurs de $\alpha > 0$ la nature de la série $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ où $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

Non pas d'évaluation asymptotique

⚠ comme Vietnam (dur)

Cvg $\int$ - série $\alpha > 1$
Cauchy sinon

b) On suppose que $u_n \underset{+\infty}{=} O(S_n)$. Exprimer en fonction de $S_n$ un équivalent des sommes partielles (resp. des restes) de la série $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ lorsqu'elle diverge (cvg)

2°/ a) Si $\sum u_n$ cvg discuter selon la valeur de $\alpha > 0$ la nature de la série $\sum \frac{u_n}{R_n^\alpha}$ où $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k$

b) On suppose que $u_n \underset{+\infty}{=} o(R_n)$. Equivalent en fonction de $R_n$ des sommes partielles (restes) de $\sum \frac{u_n}{R_n^\alpha}$ qd elle diverge (cvg)

cvg. série - ∫

Equivalent -

idem A.

idem B.

Exercice 4 : Reste d'une série alternée Monier 4.3.22 p 265

Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \right|^{\frac{1}{\ln(\ln n)}}$.

TSA, majoration du reste par le 1er terme

~~...~~ $\to 0$

$\ln\left( \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \right|^{\frac{1}{\ln(\ln n)}} \right) \leq \frac{\ln}{\ln(\ln n)} x^{-\ln(\ln n)}$

$\to -\infty$

pour ~~cl. ...~~ $\to 0$

Exercice 5 : Série harmonique et dvpt asymptotique

Monier MPSI 3.1.12 p 95
Rombaldi OL

1) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

1) Montrer que $\forall m \in \mathbb{N}$ $H_{2^{m+1}} - H_{2^m} \geq \frac{1}{2}$

b) En déduire que $H_n \to +\infty$

c) Donner le développement asymptotique à 3 termes de $H_n$

Une sous-suite diverge

Utiliser les th de comparaison.

# 407 compléments

Equivalents du reste des séries alternées
pour équivalent de $\sum \frac{(-1)^k}{k}$ et $\sum (-1)^k \frac{\ln k}{k}$

Rombaldi O2 ex 15.3 p 263

Equivalent de sommes partielles ou des restes d'une série de la forme $\sum f(n)$, avec $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$ $C^1$
telle que $\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = \ell \in \mathbb{R}^*$

(th des acc. finis, équivalent avec $\int$, DL)

Rombaldi O2 ex 15.6 p 272