# 405 : Exemples de calcul exact de la somme d'une série numérique

**Idée** : quand la série converge, peut-on calculer la somme ?

- Faire un calcul approché ?
- vitesse de convergence ?

} ok mais le calcul ?

utilisation de différentes branches
- les séries entières
- les séries de Fourier
- séries télescopiques de C ou C + fac.l.

**Exercice 1** : Somme des inverses des carrés

(Monier 4.3.21 p266)

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, résoudre $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{2n+1} = 1$

b) En déduire $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^2 \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}$

c) Mq $\forall x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ $\operatorname{cotan}^2 x < \frac{1}{x^2} < 1 + \operatorname{cotan}^2 x$

d) conclure $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Riemann d'ordre 2

racines n-ième / polynômes symétriques

**Exercice 2** TSSA + SE   TEU MP 11.8 p654

1/ Calculer pour tout $x \in ]-1,1[$ la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{3n+1}}{3n+1}$$

2/ Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$

cv par TSSA

Utilisation d'1 SE et cv.

Décomp. Fract. $\mathbb{R}$ $\frac{1}{X^3+1}$

Reste TSSA inf au 1er terme

**Exercice 3** Série harmonique   Skandalis 5.9 p140

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$

Mq $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge, on note $\gamma$ sa limite

série-intégrale, équivalent

2) Equivalent de $\gamma - S_n$

3) En déduire les DL à 2 termes de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}$ et $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}$

4) Calculer $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$

<u>Exercice 4</u> : Transformation d'Abel. Gourdon Ex 10 p 263
Ghandelli 6.15 p 190

SE


Etude au bord du disque $\Delta_{\theta_0}$

Dev

Soit $\sum_n a_n z^n$ une SE de rayon de convergence $\geq 1$ tq $\sum a_n$ converge. On note $f$ la somme de cette série entière sur le disque unité. Soit $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$

On pose $\Delta_{\theta_0} = \{ z \in \mathbb{C},\ |z| < 1$ et $\exists\, \rho > 0\ \exists\, \theta \in [-\theta_0, \theta_0]$

$$z = 1 - \rho e^{i\theta} \}$$

Mq $\lim\limits_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

<u>Exercice 5</u> : Autre calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ Monier p 423 (7.4 ex)

Série de Fourier
Th. de Dirichlet
Formule de Parseval.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $2\pi$ périodique, impaire telle que

$$\begin{cases} \forall t \in ]0, \pi[ & f(t) = 1 \\ \forall n \in \mathbb{Z} & f(n\pi) = 0 \end{cases}$$

1) Calculer les coefficients de Fourier de la fonction $f$

2) Mq $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4}$ et que $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

3) En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

405 : Somme des inverses de carrés — Monier ex 4.3.21 Analyse MP p266

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{2n+1} = 1$

b) En déduire que $\sum_{k=1}^{n} \cotan^2 \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}$

c) Mq $\forall x \in ]0; \frac{\pi}{2}[$ $\cotan^2 x < \frac{1}{x^2} < 1 + \cotan^2 x$

d) Conclure $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Preuve : a) Posons pour $k \in \{0, .. 2n\}$ $\theta_k = \frac{2k\pi}{2n+1}$ et $\omega_k = e^{i\theta_k}$

donc $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$

$$\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{2n+1} = 1 \iff \left(\exists k \in \{0, ... 2n\} \quad \frac{z-i}{z+i} = \omega_k\right)$$

$$\iff \exists k \in \{1, .. 2n\} \quad z = i \frac{1+\omega_k}{1-\omega_k}$$

$$i\frac{1+\omega_k}{1-\omega_k} = i\frac{1+e^{i\theta_k}}{1-e^{i\theta_k}} = i\frac{e^{i\theta_k/2}\left(e^{-i\theta_k/2}+e^{i\theta_k/2}\right)}{e^{i\theta_k/2}\left(e^{-i\theta_k/2}-e^{i\theta_k/2}\right)}$$

$$= -i\frac{e^{+i\theta_k/2}+e^{-i\theta_k/2}}{e^{i\theta_k/2}-e^{-i\theta_k/2}} = -\frac{\cos\frac{\theta_k}{2}}{\sin\theta_k/2}$$

$$= -\cotan \theta_k/2 = -\cotan\frac{k\pi}{2n+1}$$

Les solutions sont $\left\{-\cotan\frac{k\pi}{2n+1}, \; k \in \{1, .., 2n\}\right\}$

b) Utilisation de la formule du binôme sur

$$\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{2n+1} = 1 \iff (z-i)^{2n+1} - (z+i)^{2n+1} = 0$$

$$\iff 2\binom{2n+1}{1}z^{2n} + 2\binom{2n+1}{3}z^{2n-2} + \dots = 0 \quad (1)$$

(seuls les termes pairs subsistent)

On utilise les fonctions symétriques élémentaires sur l'équation (1)

Après factorisation pour obtenir un polynôme unitaire

$$\sigma_1 = 0 \qquad \sigma_2 = \frac{2\binom{2n+1}{3} i^3}{2\binom{2n+1}{1} i} = -\frac{n(2n-1)}{3} \qquad (\text{dvpt de } \binom{2n+1}{3})$$

or $\sigma_1 = \sum_{i=1}^{2n} z_i$

$\sigma_2 = \sum_{i<j} z_i z_j$ $\Bigg\}$ $\sum_{i=1}^{2n+1} z_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{2n} z_i\right)^2 - 2\sum_{i<j} z_i z_j$

$$= \sigma_1^2 - 2\sigma_2$$

Soit $\sum_{k=1}^{2n} \text{cotan}^2 \frac{k\pi}{2n+1} = -2 \times \left(-\frac{n(2n-1)}{3}\right)$

$$= \frac{2n(2n-1)}{3}$$

Or $\forall k \in [\![n+1, 2n]\!]$

$$\text{cotan} \frac{k\pi}{2n+1} = -\text{cotan} \frac{(2n+1-k)\pi}{2n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \text{cotan}^2 \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2n} \text{cotan}^2 \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}$$

c) Pour $u \in ]0, \frac{\pi}{2}[$

$0 < u < \tan u$ donc $\text{cotan}^2 u < \frac{1}{u^2}$

et $0 < \sin u < u$ donc $1 + \text{cotan}^2 u = \frac{1}{\sin^2 u} > \frac{1}{u^2}$

on a donc $\text{cotan}^2 u < \frac{1}{u^2} < 1 + \text{cotan}^2 u$

d) avec c) $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall k \in [\![1, n]\!]$

$$0 < \left(\frac{2n+1}{k\pi}\right)^2 - \text{cotan}^2 \frac{k\pi}{2n+1} < 1$$

On somme $0 < \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2n+1}{k\pi}\right)^2 - \frac{n(2n-1)}{3} < n$

$$0 < \frac{(2n+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \frac{n(2n-1)}{3} < n$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\frac{n(2n-1)}{3} \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < \frac{2\pi^2 n(n+1)}{3(2n+1)^2}$

d'où $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \xrightarrow[+\infty]{} \frac{\pi^2}{6}$