404 : Exemples d'études de la convergence de séries numériques

Idée intro : après la définition d'une série, c'est ce que l'on pose comme question pour savoir s'il existe $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$!

- Convergence dans $\mathbb{R}$: TEO RPS :

  Soit $S_n = \sum_{p=0}^{n} u_p$.

  On dit que la série $\sum u_n$ cvg si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet comme limite finie dans $\mathbb{K}$.

- Critères de convergence :
  - suites de Cauchy dans espace complet
  - séries à termes positifs (comparaison)
  - séries alternées

Exercice 1 Monier TPP p263 et p252

1) Mq la série suivante est convergente et calculer sa somme

$$u_n = (n-1)^\alpha + (n+1)^\alpha - 2n^\alpha \quad \alpha \in \mathbb{R} \text{ fixé}$$

Télescopage : on montre que cela converge avec cvg. de Riemann et on a la somme

2) Nature de la série $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$

Dévelop. asymptotique

Exercice 2. Delaunay p18 ex 9

Justifier l'existence et calculer la somme suivante

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

TSSA puis $\sum_{n=1}^{2N}$ avec séparation + équivalent de Stirling. $= \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$

Exercice 3. Delaunay p20 ex 10

Règle de Raabe-Duhamel et application.

voir 202 compléments cas $l=1$ pour la règle de d'Alembert.

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs.

a) On suppose qu'à partir d'un certain rang $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$

Mq (u_n) est dominée par (v_n)

b) On suppose qu'il existe $\alpha > 1$ tq

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \text{ mq } (u_n) \text{ cvg}$$

c) $\alpha < 1$ tq $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, mq (u_n) diverge

d) ex $a \in \mathbb{R}$, cvg absolue de la série de tq

$$u_n = \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}$$

Dev

Exercice 4 : Règle d'Abel   Rouvière Analyse MP p 286 Dantzer   voir dev.

Soit $(E, \|.\|)$ espace vectoriel normé complet, (u_n) suite réelle décroissante de limite 0 et (v_n) suite dont les sommes partielles sont bornées.

0) $V_{p,q} = \sum_{k=p}^{q} v_k$, $\sum_{k=p+1}^{q} u_k v_k = u_q V_{p,q} + \sum_{k=p+1}^{q-1} (u_k - u_{k+1}) V_{p,k}$

1) Démontrer que $\sum_{n\geq 0} u_n v_n$ est convergente dans E

2) $\forall (t, \alpha) \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z} \times]0;+\infty[$, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{int}}{n^\alpha}$ cvg

Exercice 5 : Constante d'Euler   Rouvière MP Analyse p 259   Application de la relation série-intégrale leçon 215.

1) Démontrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$ avec γ constante d'Euler, définie comme limite d'une suite

2) Valeur approchée de γ.

403 Ex d'étude de convergence de séries numériques.

Exo 1 : Monier Analyse MP p 263 / calcul d'1 somme.

Convergence et calcul de la somme pour la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ où

$$u_n = (n-1)^\alpha + (n+1)^\alpha - 2n^\alpha \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R} \text{ fixé.}$$

Rq par télescopage (1 peu compliqué) / $u_2, u_3, u_4 \dots$
u_{n-2}, u_{n-1}, u_n.

↳ il faut que $\alpha \leq 1$ / $\sum_{k=2}^{n} u_k = 1 - 2^\alpha + \alpha n^{\alpha-1} + o(n^{\alpha-1})$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 1-2^\alpha & \text{si } \alpha < 1 \\ 0 & \alpha = 1 \end{cases}$$

calcul de la somme explicite

Exo 2 : Critère de convergence Monier p260, exo 4.2.14 Règle de Cauchy

Soit $\sum_n u_n$ une série à termes dans $\mathbb{R}_+^*$. On suppose qu'il existe $\ell \in [0,+\infty[$ tq $u_n^{1/n} \xrightarrow[+\infty]{} \ell$

Montrer que si $\ell < 1$, alors $\sum u_n$ converge
si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ diverge

Applicat déterminer la nature de $\left(\frac{n+1}{2n+5}\right)^n$ $\quad \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$.

Exo 3 : Comparaison avec une somme de référence Monier p 288 / 4.2.1

Etudier la convergence de la série de terme général

$$v_n = (n+1)^{1/n} - n^{1/n+1}$$

{ Equivalent série de Bertrand

Exo 4 TSSA et règle d'Abel.

Monier p252, 4.3.8

a) Nature de la série de terme général en $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{4}\sqrt{n}}$

b) Pour tous $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ $\alpha \in]0,1]$

mq $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ converge

404 compléments

1) Règle de Gauss   Rodot p 205, 2.7.1

Th. Soit (u_n) suite réelle strictement positive telle que

$$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times]1; +\infty[\quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$$

Alors 1) $\exists h \in \mathbb{R}_+^*$ $u_n \sim \frac{h}{n^\alpha}$

2) $\alpha > 1 \Rightarrow \sum u_n$ converge

$\alpha \leq 1 \Rightarrow \sum u_n$ diverge.

Commentaires : comme la règle de Raabe-Duhamel.

On montre la première partie puis Riemann sur la seconde

Application : nature de $\sum u_n$ où $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_n = \frac{\prod_{k=1}^{n} (2k-1)}{\prod_{k=1}^{n} 2k} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$

par développement limité.

404 Exemples d'étude de convergence de séries numériques.

Ex 1 Etudier la convergence des séries de terme général :

1) $u_n = \dfrac{n!}{n^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

2) $u_n = \left(\dfrac{n+1}{2n+5}\right)^n$

3) $u_n = (n-1)^\alpha + (n+1)^\alpha - 2n^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé

4) Etudier en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, la nature de

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^{n-1}}$$

Ex 2 - Justifier l'existence et calculer la somme suivante

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Ex 3 Soit (u_n) suite à termes réels strictement positifs telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{pour } \alpha \in \mathbb{R}.$$

On veut montrer que la série de terme général (u_n) converge si et seulement si $\alpha > 1$

1°/ Montrer que la série de terme général $v_{n+1} - v_n$, avec $v_n = \ln(n^\alpha u_n)$, $n>0$, est convergente

2°/ En déduire l'existence d'un réel positif d tel que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{d}{n^\alpha}$$

3°/ Démontrer le critère

4°/ Application, nature de la suite de tg $u_n = \dfrac{1.3.5\cdots(2n-1)}{2.4.6\cdots 2n} \times \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Ex 4 - 1) Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que

i) (u_n) est décroissante et converge vers 0

ii) $\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$ est bornée

Montrer que $\sum u_n v_n$ converge

2) Application : Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, étudier la nature de la suite $\sum u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{\sin(n\theta)}{n}$

Exercice 5

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de réels strictement positifs. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \quad \text{et en cas de convergence de } \sum u_n$$

$$R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k$$

1) On suppose que $\sum u_n$ diverge.

Prouver que $\sum \dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$

2) On suppose que $\sum u_n$ converge

Prouver que $\sum \dfrac{u_n}{R_n^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha < 1$

Autre possibilité pour le fin : $\sum u_n$ converge.

Mq $\sum \dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$ converge $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Rep $S_n^\alpha \sim S^\alpha$ $\quad \sum \dfrac{u_n}{S_n^\alpha} \sim \dfrac{1}{S^\alpha} \sum u_n$ donc cvg

Ex 3 = Raabe - Duhamel.

1) série $(v_{n+1} - v_n)$ est cvg $\quad v_n = \ln(n^\alpha u_n) \quad n>0$

dvp limité de ln.

$$v_{n+1} - v_n = \ln((n+1)^\alpha u_{n+1}) - \ln(n^\alpha u_n)$$

$$= \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$$

$$= \alpha \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$$

$$= \alpha\left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \ln\left(1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) + \left(-\frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc $|v_{n+1} - v_n|$ est dominé par le tg d'1 série de Riemann cvg

donc $\sum (v_{n+1} - v_n)$ abs. cvg donc cvg

2) la série de tg $v_{n+1} - v_n$ cvg

Télescopage. $\sum_{n=0}^{N} (v_{n+1} - v_n) = v_{N+1} - v_0$

cvg série $\Rightarrow$ cvg de la suite (v_n).

$\exists \mu \in \mathbb{R} \quad \ln(n^\alpha u_n) = v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mu$

on pose $\lambda = e^\mu \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $n^\alpha u_n \to \lambda$

$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n^\alpha}$

3) On a obtenu 1 équivalent en $\frac{1}{n^\alpha}$ du terme u_n.

Riemann. cvg ssi $\alpha > 1$, équiv. à celle pour la série

4) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1.3\ldots(2(n+1)-1)}{2.4\ldots(2(n+1))} \cdot \dfrac{2.4\ldots 2n}{1.3\ldots 2n-1} \sqrt{\dfrac{n}{n+1}}$

$$= \sqrt{\frac{n}{n+1}} \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{1+\frac{1}{2n}}{1+\frac{1}{n}} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-3/2}$$

$$= \left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1 - \frac{3}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ici existence de $u_n \sim \frac{b}{n}$ tq d'i fini dg. $\sum u_n$ dvg

---

Ex 2. Existence et somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

alterné $|u_n| = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, $u_n \to 0$ et décroissant

$n+1 \geq n$ $\quad \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$.

$\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) \leq \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$\sum u_n$ cvg

Somme : faire par et rapport

Somme partielle pour cette cvg

$$\sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \sum_{p=1}^{N} \ln\left(1+\frac{1}{2p}\right) - \sum_{p=0}^{N-1} \ln\left(1+\frac{1}{2p+1}\right)$$

$$= \underbrace{\sum_{p=1}^{N} \ln\left(\frac{2p+1}{2p}\right)}_{\ln\left(\frac{(2N+1)!}{2^{2N}(N!)^2}\right)} + \underbrace{\sum_{p=0}^{N-1} \ln\left(\frac{2p+1}{2p+2}\right)}_{\ln\left(\frac{(2N)!}{2^{2N}(N!)^2}\right)}$$

d'où $\ln\left(\frac{(2N!)(2N+1)!}{2^{4N}(N!)^4}\right)$

⊕ Stirling $\to \frac{2}{\pi}$ donc $\ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$

Ex 4 – Pq $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k v_k\right)$ cvg (somme partielle)

$\forall n \in \mathbb{N} \quad V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k \quad \begin{cases} v_0 = V_0 \\ v_n = V_n - V_{n-1} \text{ pour } n \geq 1 \end{cases}$

$$\sum_{k=0}^{n} u_k v_k = u_0 v_0 + \sum_{k=1}^{n} u_k v_k = u_0 V_0 + \sum_{k=1}^{n} u_k (V_k - V_{k-1})$$

$$= u_0 V_0 + \sum_{k=1}^{n} (u_k V_k - u_k V_{k-1}) = u_0 V_0 + \sum_{k=1}^{n} u_k V_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} V_k$$

$$\sum u_k v_k = \sum_{k=0}^{n} (u_k - u_{k+1}) V_k + u_{n+1} V_n. \quad (A)$$

(hyp) $(u_n) \to 0$ et V_n bornée donc $u_{n+1} V_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$

(V_n) bornée $\exists\, n \in \mathbb{R}_+^*$ tq :

$\forall k \in [\![0,n]\!] \quad |u_k - u_{k+1}||V_k| \leq n\, |u_k - u_{k+1}|$ ① (*)

(u_n) décroissante

donc $|u_k - u_{k+1}| = u_k - u_{k+1}$

or (u_n) cvg donc $\sum u_k - u_{k+1}$ cvg aussi

donc (*) $\sum (u_k - u_{k+1}) V_k$ cvg abs

donc $\sum (u_k - u_{k+1}) V_k$ cvg et la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} (u_k - u_{k+1}) V_k\right)$ converge

Avec (A) $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k v_k\right)$ converge. somme partielle converge.

2) Ex $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z} \quad u_n = \dfrac{\sin(n\theta)}{n}$.

$v_n = \dfrac{1}{n}$ et $w_n = \sin(n\theta)$

(v_n) décroissante $\to 0$, w_n bornée ?

$\left(\sum_{k=1}^{n} \sin(k\theta)\right) = \left(\mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}\right)\right)$ est bornée

$e^{i\theta} \neq 1$ car $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$

$$\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta} = \sum_{k=1}^{n} (e^{i\theta})^k = e^{i\theta} \frac{1-e^{in\theta}}{1-e^{i\theta}} = e^{i\theta} \frac{e^{\frac{in\theta}{2}}}{e^{\frac{i\theta}{2}}}$$

$$= e^{i\frac{(n+1)}{2}\theta} \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Partie imaginaire

$$\sum_{k=1}^{n} \sin k\theta = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta \sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$| \quad | \leq \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|} \quad \text{borné.}$$

d'où $\sum u_n$ cv.

Ex 1 $\circ$ $u_n = \frac{n!}{n^n}$ D'Alembert e^{-1}
+ exp

$\circ$ $\left(\frac{n+1}{2n+7}\right)^n$ $\frac{n+1}{2n+7} \longrightarrow \frac{1}{2} < 1$ cv

$\circ$ $u_n = (n-1) \longrightarrow$ ~~telescop~~

$u_2 = 1^\alpha - 2.2^\alpha + 3^\alpha$
$u_3 = 2^\alpha - 2.3^\alpha$
$u_4 = 3^\alpha \dots$

$\sum_{k=2}^{n} u_k = 1 - 2^\alpha - n^\alpha + (n+1)^\alpha$

DL $1 - 2^\alpha + \alpha n^{\alpha-1} + o(n^{\alpha-1})$

$\circ$ $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^{n-1}}$ DL $\underset{+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ pas de sgn cst $\alpha \leq 1$ (faute ...)

DL

$$\frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^{n-1}} = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \cdot \frac{1}{1+u} \quad \text{avec } u = \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$= \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^\alpha}}_{u_n} + \underbrace{\frac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)}_{v_n}$$

cvg $\forall \alpha$ ssi $\alpha > \frac{1}{2}$

cvg ssi $\alpha > \frac{1}{2}$

Conv. $\sum u_n$ cvg $\Leftrightarrow$ (S_n) suite sommes partielles cv.

Prop. – $\sum u_n$ cvg $\Rightarrow u_n \to 0$ cntre série harmo.

Prop. (a_n) cvg $\Leftrightarrow \sum (a_{n+1} - a_n)$ cvg.

---

de $\mathbb{R}_+$ Il faut et suffit que $\exists n \in \mathbb{R}_+$ $\sum_{k=1}^{n} u_k \leq n$.

cmp $\sum_{n \geq} u_n$, $\sum v_n$ $0 \leq u_n \leq v_n$ $\sum v_n$ cvg $\Rightarrow \sum u_n$ cvg.

Equ. $0 \leq v_n$ $u_n \sim v_n$, $\sum u_n$ et $\sum v_n$ même nature. (pas pour $\mathbb{C}$ et terme variable)

exp Riemann / Bertrand

Règle d'Alembert. $\sum u_n \in \mathbb{R}_+^*$ $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ admet une limite ℓ finie en $\mathbb{R}_+$

$\ell < 1$ cvg.
$\ell > 1$ div.

(cmp. série géom) $\lambda = \frac{\ell + 1}{2}$ $1 < \lambda < 1$.
$\ell < 1$

ex $\frac{n!}{n^n}$ $u_n = \frac{n!}{a^n}$ d'Alembert p235

Cauchy. $\sum u_n$ $\mathbb{R}_+$ $u_n^{1/n} \to \ell$. $\ell < 1$ cvg, $\ell > 1$ dvg. $\left(\frac{n+1}{2n+5}\right)^n$ p241 Cauchy

---

de un evn. Wer.

Critère de Cauchy. Cauchy/ $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$ $N \leq p < q \Rightarrow \left\| \sum_{k=p+1}^{q} u_k \right\| \leq \varepsilon$

cvg absol.

---

série alternée – $(-1)^n u_n$ u_n à termes réels

$\to 1$

Dev asympt. $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ p252

Comparaison série - intégrale

$f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}$. cpm décroissante

$$\forall p, q \in \mathbb{N}^2 \quad n_0 \leq p < q$$

$$\int_{p+1}^{q+1} f \leq \sum_{k=p+1}^{q} f(k) \leq \int_{p}^{q} f$$

1. f cpm ≥ 0 décroissante

$$w_n = \int_{n-1}^{n} f(t)\,dt - f(n)$$

$\sum w_n$ cv

f intégrable sur $[0, +\infty[$ ssi $\sum f(k)$ cv

~~Si~~ Si l'une ou l'autre des

$$\sum_{n=1}^{+\infty} w_n = \int_0^{+\infty} f - \sum_{n=1}^{+\infty} f(n).$$

---

2) Ex.

Th. Télescopage. Calcul exact d'une somme $\boxed{p\ 263}$

ex $\sum_{n \geq 2} u_n$ avec $u_n = (n-1)^\alpha + (n+1)^\alpha - 2n^\alpha$.

$u_2 = 1^\alpha - 2.2^\alpha + 3^\alpha$ Astuce on décompose les termes

$u_3 = 2^\alpha - 2.3^\alpha + 4^\alpha$

$u_4 = 3^\alpha - 2.4^\alpha + 5^\alpha$

$$\sum_{k=2}^{n} u_k = 1 - 2^\alpha - n^\alpha + (n+1)^\alpha$$

$$= 1 - 2^\alpha + n^\alpha\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha - 1\right)$$

$$= 1 - 2^\alpha + n^\alpha\left(\frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= 1 - 2^\alpha + \alpha n^{\alpha-1} + o(n^{\alpha-1})$$

cv finie ssi $\underline{\underline{\alpha \leq 1}}$

Stirling $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

Cvp. restes

1) $\sum u_n$ série et $\sum v_n$ série ⊕ cvg.

1) si $u_n = o(v_n)$ alors $\sum u_n$ cvg et

$$R_n(u) \underset{+\infty}{=} o(R_n(v))$$

2) $u_n = O(v_n)$ alors $\sum u_n$ cvg et $R_n(u) \underset{+\infty}{=} O(R_n(v))$

3) equiv.

2) Cvp. sommes partielles

$\sum v_n$ divergente ⊕.

$u_n = o(v_n)$ alors $S_n(u) = o(S_n(v))$

$\sim$ $S_n(u) \sim (S_n(v))$

Étude des sommes

$\sum u_n$ cvg alors étude du reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$

encadrement de R_n.

$\begin{cases} \text{cvg. pour intégral.} \\ \text{TSSA } |R_n| \leq |u_{n+1}| \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

<u>Prop</u> si signe 2 séries $\sum v_n$ cvg. et $u_n = O(v_n)$, $v_n \geq 0$

alors $\sum u_n$ cvg et $R_n(u) = O(R_n(v))$

divergence. $S_n(u) = O(S_n(v))$

<u>série double</u> si $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ suite double **p 281**

<u>Si</u> $\begin{cases} \forall p \in \mathbb{N} \ \sum_{q \geq 0} u_{p,q} \text{ converge} \\ \text{si } \sum_{p \geq 0} \left(\sum_{q=0}^{\infty} u_{p,q} \right) \text{ cvg} \end{cases}$ <u>alors</u> $\forall q \in \mathbb{N} \ \sum_{p \geq 0} u_{p,q}$ cvg.

$\sum_{q \geq 0} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \text{ cvg} \right)$

et $\sum_p \sum_q = \sum_q \sum_p$

si abs. cvg $\begin{cases} \sum_q |u_{p,q}| \text{ cvg} \\ \sum_{p \geq 0} \sum_{q=0}^{+\infty} |u_{p,q}| \text{ cvg.} \end{cases}$

alors $\sum_{p \geq 0} u_{p,q}$ est abs cvg., tout est abs cvg. et interversion