403 · Exemples d'étude de suite définie par une relation de récurrence

* On peut mettre les exemples et le salle

6 feuilles derrière

→ Présenter les méthodes
→ donner 1 ex d'étude $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

Intro – idée approcher un nombre par une suite

Dans l'idéal, une suite récurrente converge, on itère pour s'approcher du nombre.

Utilisation du th de point fixe (c'donne des les conditions) coeff. contractant.

Méthode de Newton avec plus de condition sur la fonction.

Sinon, que se passe-t-il quand les suites divergent ?

aussi 1 exemple en matriciel

Exercice 1 $u_{n+1} = f(u_n)$ $\begin{cases} \text{Ronier RPSi p115} \\ \text{Delaunay RPSi p120 ex28} \end{cases}$

Etudier la suite définie par

a) $u_0 \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \frac{1}{6}(u_n^2 + 8)$

b) Algo de Babylone $a > 0$

(Méthode de Newton cachée) $u_0 \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$

converge, et $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1} - a}{(u_n - \sqrt{a})^2}$?

Idée Etude de $f(x) = \frac{1}{6}(x^2+8)$
- représ. graph.
- limite de $\ell = f(\ell)$
- u bornée par rec.
- monotonie.
- cv éventuelle.

Approx de $\sqrt{\ }$
$u_n \to \sqrt{a}$
+ vitesse de cv.

Exercice 2 – Suite de Fibonacci Ronier RPSi p111

Etudier $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\phi_0 = 0$ et $\phi_1 = 1$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\phi_{n+2} = \phi_{n+1} + \phi_n$

Intérêt historique, application $\mathbb{E}_{q,b}$.

→ ouvrir sur eq avec 2nd ordre RONIER RPSi p112

Exercice 3 Moyenne Arithmético-Géométrique Ronier RPSi 32.3 p101

A développer

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

les suites définies par $u_0 = a$ $v_0 = b$

et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$

a) Rq (u_n) et (v_n) cv vers 1 même limite, c'est la moyenne arithmético-géo. de a et b

b) Etablir $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$0 \leq v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{(v_n - u_n)^2}{2(\sqrt{v_n} + \sqrt{u_n})^2} \leq \frac{(v_n - u_n)^2}{8\sqrt{ab}}$$

c) α) Rq $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ tq

$$0 \leq \frac{v_{n_0} - u_{n_0}}{8\sqrt{ab}} < 1$$

β) déduire de b)

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \Rightarrow 0 \leq v_n - u_n \leq 8\sqrt{ab}\left(\frac{v_{n_0} - u_{n_0}}{8\sqrt{ab}}\right)^{2^{n-n_0}}$$

<u>Exercice 4</u> Système dynamique XENS An1 p85/exo 2.13.

Etudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_0 \in]0,1[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2$ avec $\lambda \in]0,1]$

système chaotique.
f décroissante sur $]0,1[$
de $f \circ f$ / u_{2n} et u_{2n+1}
bifurcation.

403 Compléments.

1) $u_{n+1} = \sin(u_n)$ avec $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$

Cours d'orga Analyse ex 8 p 21

th ely. Théorème de Cesàro $u_{n+1}^{a} - u_n^{a} \to A \in \mathbb{R}^+$

par DL de $(\sin(u_n))^{a}$.

$u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$.

2) Suite Arithmético-géo modifiée $v_n = \sqrt{u_{n+1} v_n}$

Rombaldi Elts d'Analyse p 127

3) Lemme de l'escalier + Application.

Rouvière? p113 pb 3.1

4) ds le m style que 1) X-ENS. An 1 p 98 / exo 2.25

$u_0 > 0$ $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$

Équivalent quand $n \to +\infty$.

5) Newton. Rotrou? p273 / Leçon 201 Développement.

6) Proba : Dupont p 184

Comment s'habiller le jour de l'Apocalypse. Pq la proba qu'il fasse beau à la fin des temps ne dépend pas du temps qu'il fait aujourd'hui

Formule de conditionnement ⊕ proba totale.

Suite arithmético-géom., pt fixe.

403

Exercice : moyenne arithmético-géométrique.

Rq cv précoce ?

Monier MPSI 3.2.3 p101

Enoncé : Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par $u_0 = a$ et $v_0 = b$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

a) Mq (u_n) et (v_n) cv vers la même limite ℓ.

b) Etablir que $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$0 \leq v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{(v_n - u_n)^2}{2(\sqrt{v_n} + \sqrt{u_n})^2} \leq \frac{(v_n - u_n)^2}{8\sqrt{ab}}$$

c) α) Mq $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ tq

$$0 \leq \frac{v_{n_0} - u_{n_0}}{8\sqrt{ab}} \leq 1$$

β) déduire de b) $\forall n \in \mathbb{N} \left(n \geq n_0 \Rightarrow 0 \leq v_n - u_n \leq 8\sqrt{ab} \left(\frac{v_{n_0} - u_{n_0}}{8\sqrt{ab}} \right)^{2^{n-n_0}} \right)$

Corrigé : par récurrence immédiate

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (u_n > 0 \text{ et } v_n > 0)$$

. et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \left(\frac{u_n + v_n}{2}\right)^2 - u_n v_n$

$$= \frac{u_n^2}{4} + \cancel{u_n v_n} + \frac{v_n^2}{4} - \cancel{u_n v_n}$$

$$= \frac{u_n^2 + v_n^2}{\cancel{4}} \geq 0 \qquad \left(\frac{u_n - v_n}{2}\right)^2 \geq 0$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^2$ $v_n \geq u_n$

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} \leq 0$

donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}) \geq 0$

donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croît

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$u_1 \leq \dots \leq u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n \leq \dots < v_1$$

$$\begin{cases} (u_n) \text{ croissante et majorée (par } v_1\text{), donc cv vers } \ell \\ (v_n) \text{ décroissante et minorée (par } u_1\text{) donc cv vers } \ell' \end{cases}$$

Passage à la limite $\forall n \in \mathbb{N}$ $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ donc $\underline{\ell = \ell'}$

b) $$0 \leq v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2\sqrt{u_n v_n}}{2}$$

$$= \frac{u_n + v_n - 2\sqrt{u_n v_n}}{2} = \frac{\left(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}\right)^2}{2}$$

$$= \frac{\left(v_n - u_n\right)^2}{2\left(\sqrt{v_n} + \sqrt{u_n}\right)^2} \quad \text{(passage au conjugué)}$$

et $2\left(\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n}\right)^2 \geq 2\left(2\sqrt{u_1}\right)^2 = 8\sqrt{ab}$

c) α) $\dfrac{v_n - u_n}{8\sqrt{ab}} \xrightarrow[+\infty]{} 0$

donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ tq $0 \leq \dfrac{v_n - u_n}{8\sqrt{ab}} < 1$

β) Soit $\delta = \ln(v_n - u_n)$ et $\alpha = \ln(8\sqrt{ab})$

d'après b) $\forall n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$

$$\delta_n \leq 2\ln(v_{n-1} - u_{n-1}) - \ln(8\sqrt{ab})$$

$$\delta_n \leq 2\delta_{n-1} - \alpha$$

Par récurrence immédiate

$$\delta_{n-1} \leq 2\delta_{n-2} - \alpha$$

$$\vdots$$

$$\delta_{n_0+1} \leq 2\delta_{n_0} - \alpha$$

Soit $\delta_n \leq 2^{n-n_0}\delta_{n_0} - \left(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-n_0+1}\right)\alpha$

d'où $\delta_n \leq 2^{n-n_0}\left(\delta_{n_0} - \alpha\right) + \alpha$

Soit $v_n - u_n \leq \left(\dfrac{v_{n_0} - u_{n_0}}{8\sqrt{ab}}\right)^{2^{n-n_0}} \cdot 8\sqrt{ab}$

en reconduisant, donc les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cvt très rapidement vers ℓ.

403

Ex Proba / suite - comment s'habiller le jour de l'Apocalypse.

(chaîne de Markov)

Dupont p184 ex 3.4.

Comme il est impossible d'avoir des prévisions météo fiables à LT, on adopte le système suivant : s'il fait beau un jour, la proba qu'il fasse beau le lendemain est p_1 avec $p_1 \in]0,1[$ et celle qu'il fasse mauvais est $q_1 = 1-p_1$.
S'il fait mauvais un jour, la proba qu'il fasse mauvais le lendemain est p_2 avec $p_2 \in]0,1[$ et celle qu'il fasse beau $q_2 = 1-p_2$.
Mq la proba qu'il fasse beau à la fin des temps ne dépend pas du temps qu'il fait aujourd'hui !

Preuve : $\forall n \in \mathbb{N}$, notons B_n l'événement « il fera beau dans n jours »

$$b_n = \mathbb{P}(B_n)$$

on a $\mathbb{P}(B_{n+1} \mid B_n) = p_1$ et $\mathbb{P}(\overline{B_{n+1}} \mid \overline{B_n}) = p_2$

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \mathbb{P}(B_{n+1}) \\ &= \mathbb{P}(B_{n+1} \mid B_n)\,\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(B_{n+1} \mid \overline{B_n})\,\mathbb{P}(\overline{B_n}) \\ &= p_1 b_n + q_2 (1-b_n) \\ &= (p_1+p_2-1)\, b_n + q_2 \end{aligned}$$

Donc (b_n) est arithmético-géométrique de raison géom $a = p_1+p_2-1$ et de raison arithm $b = q_2$

or $0 < p_1, p_2 < 1$ donc $-1 < a < 1$

la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers un point fixe de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = ax+b$$

soit $\ell = \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{q_2}{q_1+q_2}$. La proba qu'il fasse beau est $\dfrac{q_2}{q_1+q_2}$

indépendant de b_0 !