# 402 - Exemples d'étude de suites ou séries divergentes.

Idée : rappel d'1 série divergente. 2 cas :

1) $u_n$ ou $\sum u_n \to \pm\infty$

2) $u_n$ tend vers plusieurs limites !

**Exercice 1** Suite divergente — Rombaldi MPSI _ ex p96

a) Nature de $u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)$ — p 96 Rombaldi

Écrire le produit $\prod(\;) \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2}$ donc diverge !

b) Nature de $\sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}$ ou $\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{\sqrt{n^2+2k}}$ — Rombaldi p96

c) Nature de $u_n = \exp\left(n i \frac{\pi}{2}\right)$ — TEU MPSI p423

d) Suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 - \frac{2}{u_n}\end{cases}$ — Rombaldi 3.4.6 p118

**Exercice 2** Étude de la suite $\cos(n\theta)$ $\theta \in \mathbb{R}$

Rombaldi MPSI 3.1.4 p99

Dantzer p81

Donne la divergence de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$

a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tq $\frac{\alpha}{\pi} \notin \mathbb{Z}$. Mq l'existence d'une des deux limites $\lim \sin n\alpha$, $\lim \cos n\alpha$ entraîne celle de l'autre.

b) Mq l'existence de ces 2 limites conduit à 1 contradiction.

**Exercice 3** Suite de rationnels à limite irrationnelle

Rombaldi MPSI 3.3.5 p108

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de rationnels convergeant vers $x$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \frac{p_n}{q_n}$ où $(p_n, q_n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ — aussi dans le Gourdon ex 4 p 205. Difficile. Ex: d'analyse Rombaldi p 125

Démontrer que $q_n \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$ et $|p_n| \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$

Exercice 4 : Développement asympt / TSSA    Monier MP p252

Nature de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$

Exercice 5 : Série harmonique et dvpt asympt.    Monier MPSI 3.1.12 p95    DEV
Rombaldi O2
TEO MPSI

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ on note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

1) Mq $\forall m \in \mathbb{N}$ $H_{2^{m+1}} - H_{2^m} \geq \frac{1}{2}$

2) En déduire que $H_n \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$    Th de comparaison

3) Donner un dvpt asymptotique à 3 termes de $H_n$

# 402 : Compléments d'exercices

A Série définie à partir d'une permutation de $\mathbb{N}^*$

X-ENS An. 1 p 138

Soit $\sigma$ une permutation de $\mathbb{N}^*$

quelle est la nature de la série $\sum \frac{\sigma(n)}{n^2}$ ?

Rep : En prenant en cas particulier $\sigma = Id$, on obtient $\sigma(n) = n$

d'où $\sum \frac{\sigma(n)}{n^2} = \sum \frac{1}{n}$ série harmonique $\Rightarrow$ diverge.

Dans le cas général, on va nier le critère de Cauchy.

On va plus précisément minorer une tranche de Cauchy

Soit $N \geq 1$, on considère $2N$ entiers naturels non nuls 2 à 2 distincts

$N$ d'entre eux sont supérieurs ou égaux à $N$

C'est le cas pour la famille des $\sigma(n)$ quand $n$ décrit les entiers

compris entre $N+1$ et $2N$.

$$\sum_{n=N+1}^{2N} \frac{\sigma(n)}{n^2} \geq \sum_{n=N+1}^{2N} \frac{\sigma(n)}{(3N)^2} \geq \sum_{n=N+1}^{2N} \frac{N}{(3N)^2} = \frac{N^2}{9N^2} = \frac{1}{9}$$

le critère de Cauchy n'est pas vérifié donc $\sum \frac{\sigma(n)}{n^2}$ diverge.

B. Série de rationnels qui tend vers un irrationnel. $\begin{cases} \text{Ramis Odoux: Ell A. p 125} \\ \text{Ronia RPS: 3.3.5 p108} \end{cases}$

Soient $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de rationnels cv vers $x$

$\forall n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \frac{p_n}{q_n}$ avec $(p_n, q_n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$

Démontrer que $q_n \to +\infty$ puis $|p_n| \to +\infty$

Pour démontrer ce résultat, il faut le lemme suivant :

Lemme Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de réels tq $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \in \mathbb{Z}$ — Mardi 3.1.13

Mq $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ssi $(u_n)$ est stationnaire.

preuve : $\Leftarrow$ si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire, $\exists N \in \mathbb{N}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ tq

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N \Rightarrow u_n = \ell)$$

donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell$.

$\Rightarrow$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cv, notons $\ell$ sa limite

$\exists N \in \mathbb{N}$ tq

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \frac{1}{3})$$

On a alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $(n \geq N \Rightarrow |u_n - u_N| \leq |u_n - \ell| + |u_N - \ell| < 1$

comme $u_n$ et $u_N \in \mathbb{Z}$ alors $u_n = u_N$

donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire et cv vers $u_N$.

Raisonnons par l'absurde :

Supposons que $q_n \underset{+\infty}{\not\to} +\infty$, $\exists A \in \mathbb{R}_+^*$ tq

$$\forall N \in \mathbb{N} \ \exists n \in \mathbb{N} \ (n \geq N \text{ et } q_n < A)$$

On peut donc extraire de $(q_n)$ une sous-suite $(q_{\sigma(n)})$

avec $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad q_{\sigma(k)} < A$$

On peut la construire comme suit (Rombaldi) :

pour $k = 0$, il existe $\sigma(0) > 0$ tel que $q_{\sigma(0)} \leq \alpha$

si l'on suppose construit les entiers $\sigma(0) < \sigma(1) \ldots < \sigma(n)$ tel que

$$0 < q_{\sigma(k)} < A \quad \forall k \in [\![0, n]\!]$$

on peut trouver $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ tq $0 < q_{\varphi(n+1)} < A$

De cette suite bornée, on peut extraire une sous-suite qui cvg vers un entier $q \geq 1$

—

$[1, A[ \cap \mathbb{N}^*$ est fini, donc il existe une extractrice $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tel que $\left(q_{\tau(\sigma(k))}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ soit constante. Notons $q$ cette constante

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad p_{\tau\circ\sigma(k)} = u_{\tau\circ\sigma(k)}\, q_{\tau\circ\sigma(k)} \xrightarrow[k \to +\infty]{} xq$$

La suite $(p_{\tau\circ\sigma(k)})$ est à termes dans $\mathbb{Z}$ et converge, donc d'après le lemme, elle est stationnaire. $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall k \in \mathbb{N}$ $(k \geq k_0 \Rightarrow p_{\tau\circ\sigma(k)} = xq)$

alors $\forall k \in \mathbb{N}$ $(k \geq k_0 \Rightarrow u_{\tau\circ\sigma(k)} = x)$

or $x$ est irrationnel, donc contradiction.

donc $q_n \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$

Comme $\forall n \in \mathbb{N}$ $p_n = u_n q_n$ et que $u_n \xrightarrow[+\infty]{} x \in \mathbb{R}^{+*}$, $|p_n| \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$.

402 Ex d'études de suites ou séries divergentes → produit de Cauchy divergente

Ex 1 Monier PPSI p 56

Nature de la suite $u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n}\right)$

Ex 2 Suite rationnelle, de limite irrationnelle Monier p108 PPSI

$x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ $u_n = \frac{p_n}{q_n}$

Dmtr que $q_n \to \infty$ puis $|p_n| \to +\infty$

Ex 3 Série divergente _ Série harmonique

$H_n = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ somme partielle Monier PPSI MP*

a) Mq $H_{2n+1} - H_{2n} \geq \frac{1}{2}$

b) Mq la série diverge

c) en déduire la nature de la série de tg $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ $\alpha < 1$

d) calcul d'1 dvp asymptotique TEU p415 (MP)

Ex 4 Avec 1 développt asymptotique Monier p 172

$\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$

~~Ex 5~~

Série de Bertrand dans le cas divergent ? TEU MP* p413

- $\sum u_n$ à termes $\mathbb{R}^+$

$\sum u_n$ div. Mq l'existence d'1 suite positive $(a_n)$ de limite nulle tq $\sum a_n u_n$ div. TEU MP* p431

- $\sum u_n$ cvg. Mq $\exists (b_n)$ suite ⊕ de lim ∞ tq $\sum b_n u_n$ cvg.

- Exo 8.10 p433