356 Exercices faisant intervenir les permutations d'1 ensemble fini

Ex 1 = ex simple de permutation $\sigma \in S_6$. TEU chap permut/det. RMS

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

σ^{-1}, $\sigma^{l} = Id_{[\![1,6]\!]}$, décomposition en cycle à supports disjoints

signature.

Ex 2 1) $i,j \in [\![1,n]\!]^2$ et $\sigma \in S_n$. $\sigma \circ (i\,j) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(i)\ \sigma(j))$

2) transposition $(i, i+1)$. Toute permutation est composée de transpositions

3) S_n est engendré par le cycle $(1 \dots n)$ et $(1,2)$

Francinou. RMS: exo 4.3 p58

Ex 3 Endo f_σ qui envoie e_i sur $e_{\sigma(i)}$

Étude. Gullo p60

Ex 4 Groupe des isométries du plan qui conserve | le cube / le triangle. Kamel: Mercier

Ex 5 Problème des chapeaux

dérangements.

356 : Exercices utilisant les permutations d'un ensemble fini.

Exercice : 1) Soit i et $j \in [\![1,n]\!]$ et $\sigma \in S_n$. Mq
$$\sigma \circ (i\ j) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(i)\ \sigma(j))$$

2) Mq le groupe S_n est engendré par les transpositions $(i\ i+1)$ avec $i \in \{1, \dots, n-1\}$, c.a.d toute permutation peut être engendrée en composant des transpositions de cette forme. (TEU MPSI p1269)

3) Mq le groupe S_n est engendré par le cycle $(1 \dots n)$ et la transposition $(1,2)$ (TEU MPSI)

Solution : 1) On prend la démonstration générale de la conjugaison (cf. Kieffer)

Déf. On appelle <u>support de σ</u> l'ensemble des entiers $k \in [\![1,n]\!]$ tels que $\sigma(k) \neq k$. On note $supp(\sigma) = \{k \in [\![1,n]\!], \sigma(k) \neq k\}$

On appelle <u>point fixe de σ</u> l'ensemble des entiers $k \in [\![1,n]\!]$ tels que $\sigma(k) = k$. On note $Fix(\sigma) = \{k \in [\![1,n]\!], \sigma(k) = k\}$

Si $x \in Fix(\sigma \circ (i\ j) \circ \sigma^{-1})$	Si $x \in Supp(\sigma \circ (i\ j) \circ \sigma^{-1})$
$\Leftrightarrow \sigma \circ (i\ j) \circ \sigma^{-1}(x) = x$	$\Leftrightarrow \sigma \circ (i\ j) \circ \sigma^{-1}(x) \neq x$
$\Leftrightarrow (i\ j) \circ \sigma^{-1}(x) = \sigma^{-1}(x)$	$\Leftrightarrow (i\ j) \circ \sigma^{-1}(x) \neq \sigma^{-1}(x)$
$\Leftrightarrow \sigma^{-1}(x) \in Fix((i\ j))$	$\Leftrightarrow \sigma^{-1}(x) \in Supp((i\ j))$
$\Leftrightarrow x \in Fix(\sigma(i)\ \sigma(j))$	$\Leftrightarrow x \in Supp(\sigma(i)\ \sigma(j))$

donc $\sigma \circ (i\ j) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(i)\ \sigma(j))$

2) Comme toute permutation peut se décomposer en produit de cycles à support disjoints et de transpositions.

Soit $(i\ j)$ une transposition quelconque, supposons que $j > i$

alors $(i\ j) = (i\ \ i+1)(i+1\ \ i+2)\dots(j-1\ \ j).(j-2\ \ j-1)\dots(i\ \ i+1)$

3) On vérifie que $\forall i \in \{1, \dots n-2\}$ $\sigma^i \circ \tau \circ \sigma^{-i} = (i+1\ \ i+2)$ (q. 1)
toute transposition de la forme $(i\ \ i+1)$ s'écrit comme un produit des permutations τ et σ. Avec q2, on conclut.