Leçon 353 Exercices utilisant la notion d'endo nilpotent

1) $\mathrm{Tr}(f^k) = 0$ Delaunay Ex 51 p187
Fresnel ex 2.12 p61
Ramis Deschamps Odoux p 658 Alg. et géo.

2) Définitions et prop simples

$\chi_A(X) = (-1)^n X^n$ Serosna p261
Romier (équivalence $A^n \Leftrightarrow (-1)^n X^n \Leftrightarrow$ nilpotent) ex 2.4.1 p77
Delaunay $up = 0$ / ex 2 p203

3) Nilpotence et polynôme minimal ex 2.5.25 p100 Romier

4) Caractérisation de A nilpotent $\Leftrightarrow \exists (A_p)$ semblable à A + $A_p \xrightarrow[+\infty]{} 0$
Serosna 9.15 p261 (ds le cours) / Gourdon p198

5) E ev $\mathbb{K} \in \mathbb{C}^*$, $f, g \in \mathcal{L}(E)$ $\begin{cases} f\circ g - g\circ f = \alpha f \\ g \text{ diagonalisable} \end{cases}$

a) Mq $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $f^n \circ g - g \circ f^n = n\alpha f^n$ Romier p70 ex 2.3.20

b) f nilpotente

6) Alg. linéaire de base : a) $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ A nilpotente $AB = BA$, $B \neq 0$

Mq $\mathrm{rg}(AB) \leq \mathrm{rg}(B) - 1$

b) $p \in \mathbb{N}^*$, $A_1, \dots A_p \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilp. et commutant 2 à 2

Mq $\mathrm{rg}\left(\prod_{i=1}^{p} A_i\right) \leq (n-p)^+ = \begin{cases} n-p & \text{si } n-p \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ Romier Alg. MPSI ex 8.1.26 p 255

c) En déduire que avec les hyp de b), $\prod_{i=1}^{n} A_i = 0$.

7) Dans le même esprit que le 5)

$A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $AB - BA = A$ Delaunay ex 20 p153

a) calcul de $A^k B - BA^k$ $k \in \mathbb{N}$

$\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$M \mapsto MB - BM$

b) cond. pour que A^k soit vecteur propre de φ

c) En déduire A nilpotente

C

8) Déterminant

$u, v \in \mathcal{L}(E)$. $u \circ v = v \circ u$. v nilpotent.

$\det(u+v) = \det(u)$. Delcourt ex 50 p188

9) Surjectivité de l'exponentielle $\exp : M_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$

Vetzam / Rombaldi / X-ENS

10) Encadrement indice de nilpotence (Gourdon p155)

11) $N \in M_n(\mathbb{R})$, nilpotent d'indice p. Gourdon p157

a) Mq $I_n - N$ est inversible / donner son inverse

b) $M = \begin{pmatrix} 1 & -a & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -a \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$ inverse ?

2a) N nilp. d'ordre 2, $\forall p \in \mathbb{N}$ calculer $(I_n + N)^p$

b) Appli. $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ calculer M^{100}