(Emploi) de

358 : Puissances et exponentielles de matrice

Quelques rappels sur la leçon.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ le plus souvent.

$$A^k = \underbrace{A \times \dots \times A}_{k \text{ facteurs}}$$

Si A est diagonale, cas le plus simple $A^k = \mathrm{diag}(d_1^k, \dots, d_n^k)$

L'exponentielle de matrice est définie comme $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$

Exercice 1 Skandalis p270, ex 8.33 météo Tri calculatoire.

Une étude météo de la ville donne les infos suivantes.

- il est presque impossible d'avoir 2 jours de beau temps consécutifs.
- s'il fait beau 1 jour, on a la même proba d'avoir 1 gros orage ou une pluie fine le lendemain.
- s'il ne fait pas beau, 1/2 temps sera le même, et si le temps change, 1/2 qu'il fera beau.

Mémoire de 1 jour.

B_k, G_k, P_k : le jour k, il fait beau, il y a 1 gros orage ou pluie fine.

$$X_k = \begin{pmatrix} b_k \\ g_k \\ p_k \end{pmatrix}$$

1) Exprimer X_{k+1} en fonction de X_k

2) En déduire X_k en fonction de X_0

3) S'il fait beau aujourd'hui, quelle est la proba qu'il fera beau dans une semaine ?

4) Prop. moyenne des jours de pluie ?

Exercice 2 Serosina ex 10.25 p388

Résoudre le système différentiel $(E_a) : \begin{cases} x' = -x + ay + az \\ y' = -x - y \\ z' = x - z \end{cases}$ où $a \in \mathbb{R}$

Exercice 3 Suite (u_n) réelle vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$ Delaunay alg. 30 p228

$u_{n+3} + 4u_{n+2} + 5u_{n+1} + 2u_n = 0$

1) En posant $X_n \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$

déterminer $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ $X_{n+1} = AX_n$

2) déterminer u_n en fonction de u_0, u_1, u_2 et $n \in \mathbb{N}$.

→ plus simple dans le 1er cas par ex p106 ds le cours. avec détails.

Exercice 4 : Gourdon / Rombaldi 751/752 Alg et Géom.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$.

A est diagonalisable ssi e^A est diagonalisable.

Exercice 5 : (cf Kotiane)

Soit A matrice carrée réelle et S l'ensemble des solutions réelles du l'équation différentielle $X' = AX$.

Montrer l'équivalence $\forall X \in S \ \lim_{t \to \infty} X(t) = 0 \iff \forall \lambda \in Sp(A) \ \mathrm{Re}(\lambda) < 0$

complété 348

Exercice 1

a) $\mathbb{P}(B_{att}) = \mathbb{P}(B_{att} \mid B_e)\mathbb{P}(B_e) + \mathbb{P}(B_{att} \mid G_e)\mathbb{P}(G_e) + \mathbb{P}(B_{att} \mid P_e)\mathbb{P}(P_e)$

d'après formule des probas totales

b) $\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$ $\quad \det(\Pi - X I_3) = \begin{vmatrix} -X & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 - X & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/2 - X \end{vmatrix}$

1ère étape $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$

$$= \begin{vmatrix} 1-X & 1-X & 1-X \\ 1/2 & 1/2 - X & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/2 - X \end{vmatrix} = (1-X)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 - X & 1/2 - X \\ 1/2 & 1/4 & 1/2 - X \end{vmatrix}$$

$\begin{cases} c_2 \leftarrow c_2 - c_1 \\ c_3 \leftarrow c_3 \leftarrow c_1 \end{cases}$ $\quad \chi_\Pi = (1-X)\left(X^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2\right)$

$$= (1-X)\left(X - \frac{1}{4}\right)\left(X + \frac{1}{4}\right)$$

Calcul de l'espace propre de $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{1}{4}$, $\lambda_3 = -\frac{1}{4}$

Pour $\lambda_1 =$ $-4x + y + z = 0$ donc $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 \ldots$ $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\lambda_3 .$ $u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

d'où $D = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1/4 & \\ 0 & & -1/4 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$P^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & -5 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

En décomposant $D = D_1 + D_{1/4} + D_{-1/4}$

$$\Pi = PDP^{-1} = PD_1P^{-1} + PD_{1/4}P^{-1} + PD_{-1/4}P^{-1}$$

$$= P_1 + \frac{1}{4}P_2 - \frac{1}{4}P_3$$

avec $P_i^2 = P_i$ et $P_iP_j = 0 \ \forall i \neq j$

(car ce sont les projecteurs spectraux du polynôme carct.

Après calcul, $\Pi^k = P_1 + \left(\frac{1}{4}\right)^k P_2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^k P_3$

3°/ $m_{i,j}^k$ indique la proba qu'il fasse beau $i=1$
gros orage $i=2$ au temps $n+k$
pluie $i=3$

sachant qu'il fait beau $j=1$
gros orage $j=2$ au temps n.
pluie $j=3$

S'il fait beau aujourd'hui $j=1$ et $i=1$ beau à 7 jours (n)

$$m_{1,1}^7 = \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{4}\right)^7 \times \frac{4}{5}$$

4°/ A long terme, $m_{1,1}^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{5}$

$m_{2,2}^n \to 40\%$

$m_{3,3}^n \to 40\%$

Exercice 2 Sorosine.

A la nature du système, on cherche à calculer e^{tA}, $t \in \mathbb{R}$
Décomposition de Dunford ou autre pour obtenir 2 matrices qui commutent

$A = -I_3 + B$ $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

on s'aperçoit que $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & -a \\ 0 & a & a \end{pmatrix}$ et $B^3 = 0$ Nilpotente

d'où le résultat.

Exercice 3 Matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -4 \end{pmatrix}$

$\chi_A = (X+1)^2(X+2)$

puis $X^n = \chi_A Q + R$ avec $\deg R < \deg \chi_A$

on utilise la base $(1, (1+X), (1+X)^2)$ plutôt que la base canonique

Evaluation en -2 et -1 et dérivation et éval en (-1)

d'où $A^n = (-1)^n(\quad)(A+I_3)^2 + (-1)^{n-1}n(X+1) + (-1)^n$

besoin que de la 1e égu. + $A + I_3$ + $(A+I_3)^2$.

d'où (u_n).

Aussi calculatoire $\oplus$ base adaptée.

348. : EXERCICES ILLUSTRANT L'EMPLOI DE PUISSANCES OU D'EXPONENTIELLES DE MATRICES

EXERCICE 1 : Matrice de transition [Dantzer] p411

Exercice 22.1 Trois enfants A, B et C jouent à la balle. Lorsque A a la balle, il la lance à B avec une probabilité 0,75 ou à C avec une probabilité 0,25. Lorsque B a la balle, il la lance à A avec une probabilité 0,75 ou à C avec une probabilité 0,25. Lorsque C a la balle, il la lance toujours à B.

- On note A_0 (respectivement B_0 et C_0), l'événement : le joueur A (respectivement B et C) a la balle au début du jeu.
- Pour tout entier n strictement positif, on note A_n (respectivement B_n et C_n), l'événement : le joueur A (respectivement B et C) a la balle après le n-ième lancer.
- Pour tout entier naturel n, on note a_n, b_n et c_n les probabilités respectives des événements A_n, B_n et C_n et X_n le vecteur colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, vérifiant
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = MX_n.$$
2. En déduire pour tout entier naturel n, X_n en fonction de M, n et X_0.
3. Montrer que M admet trois valeurs propres réelles 1, λ_1 et λ_2 avec $-1 < \lambda_1 < \lambda_2 < 0$.
4. Montrer qu'il existe un unique vecteur u_0 qui soit vecteur propre pour la valeur propre 1 et dont la somme des coordonnées soit égale à 1.
5. On considère alors une base de vecteurs propres (u_0, u_1, u_2) où u_0 est le vecteur indiqué dans la question précédente. Montrer que la première coordonnée du vecteur X_0 dans la base (u_0, u_1, u_2) est égale à 1.
6. En déduire que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et calculer leur limite.

EXERCICE 2: Nombre de chemins dans un graphe de longueur n donnée [skandalis] p 253 ex 8.

Exercice (8.28). *Nombre de chemins dans un graphe*

1. Combien de chemins de longueur n joignent un sommet d'un triangle à un autre ?
2. Combien de chemins de longueur n joignent un sommet d'un hexagone au sommet diagonalement opposé ?

EXERCICE 3: Suites récurrentes linéaires à coefficients constants [Monier]p106

Calculer u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ sachant que $\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = 1,\ u_2 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 45u_n - 39u_{n+1} + 11u_{n+2} \end{cases}$

EXERCICE 4: Résoudre un système différentiel d'ordre 1 [SOROSINA] analyse p328

Résoudre le système différentiel $(\mathcal{E}_0)$: $\begin{cases} x' = -x + ay + az \\ y' = -x - y \\ z' = x - z \end{cases}$ où $a \in \mathbb{R}$.

Ou [Gourdon]algebre page 209

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

1) Calculer e^{tA} pour $t \in \mathbb{R}$

2) Résoudre le système différentiel : $Y' = AY$

Existence et unicité

unicité

sur ⇒ de 1 sur $\mathbb{R}^3$

EXERCICE 5 : Stabilité d' un système à coefficients constants [OXENS]4 analyse 2.62 page 170

Soit A une matrice carrée réelle et $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle $X' = AX$.

1. Montrer l'équivalence

$$\forall X \in \mathcal{S}, \quad \lim_{t \to +\infty} X(t) = 0 \iff \forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A), \ \ \mathrm{Re}\,\lambda < 0.$$

→ à cause de l'exponentielle

Généralisation.

$\boxed{\text{Etude qualitative}}$

système proie-prédateur

↓

explosion du système !

E

Puissances de matrices   Delcuny ex 4 p 205

1) Polynôme annul. et A^n $\boxed{Alg}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Suites avec récurrence linéaire   Delcuny ex 30 p 229 $\boxed{Alg}$

$$u_{n+3} + 4u_{n+2} + 5u_{n+1} + 2u_n = 0$$

$$X_{n+1} = A X_n$$

Eq. diff.   Delcuny p 419 ex 2 $\boxed{Analys}$

$$\begin{cases} x' = 4x - 2y + e^t \\ y' = 3x - y + 2e^t \end{cases}$$

Exemples - $M_{n,1}(\mathbb{R})$ struct. euclidien

$A \in M_n(\mathbb{R})$ cas   ex 8 p 425 $\boxed{Analys}$

1) A est antisym

2) X sol de $X' = AX$ est de norme constante

Résultats sur exp de matrices   Delcuny p 444 $\boxed{Analys}$

ex 23 $\det e^A = e^{\operatorname{tr} A}$ $A \in M_n(\mathbb{C})$

ex 24 $A \in M_n(\mathbb{R})$ $e^A \in \mathbb{R}[A]$.

ex 25

$A \in M_n(\mathbb{R})$, $A^2 + pA + qI_n = 0$ $(p, q) \in \mathbb{R}^2$

justifier que chaque solution de $X' = AX$

prend ses valeurs dans le plan vectoriel

Rombaldi Résol Eq diff matricielles OR p 102

difficile

Diag et puissance d'1 matrice   Rombaldi OR p 122

$$\begin{pmatrix} b & a \\ a & b \end{pmatrix}.$$

Surjectivité de l'exp. naturel → Vektor et Rombaldi // à voir

Dalya proba vecteur aléatoire vers 423

ou Skandalis sur produit tens. top.

ou exp qui part d'échelle → ⊖ bien

Cours | Rombaldi
RetNotix.

Refaire ASO ? exo

Skandalis Nombre de chemins ds le graphe...

Gourdon e^{tA} pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

Résoudre $Y' = AY$

Rouvière système de suites linéaires couplées

$\boxed{\text{Regarder X-ENS}}$ pour des exos avec calcul de cardinalité de groupes exp. d'rotat.

$AB - BA = A$? alors

→ ~~Th de Sylvester~~

~~p140 ex 2.49 X-ENS T2~~

Ex si A diago ~~ess~~ e^A est diago

~~Gourdon~~ Rombaldi + Gourdon pour décomp $A = D+N$

Rayon spectral - E.2.5.9

p155 X-ENS T2