345 Exercices sur les polygones

le plus simple.

Exo 1 démo de la formule de Héron (produit scalaire)

trigo ⊕ projection orthogonale

Exo 2 Utilisation des nombres complexes ABCD 1 quadrilatère convexe

grâce aux affixes des points

avec $AB = |b-a|$ $\arg(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \left(\frac{c-a}{b-a}\right) \ (2\pi)$

rotation d'angle $e^{i\theta}$

$z \mapsto e^{i\theta} z$.   pour $\frac{\pi}{2}$ $z \mapsto iz$

Exo 3 Polygone régulier (dev) 2n côtés

groupe des isométries qui laissent invariants le polygon.

laissent invariant son centre.

dim 2 – iso. laissant invariant 1 point :

* rotation (1 seul pt invariant) – directe
* symétries orthogonales (au moins 2 pts invariants)
* Id 3 points non alignés invariants.

indirecte

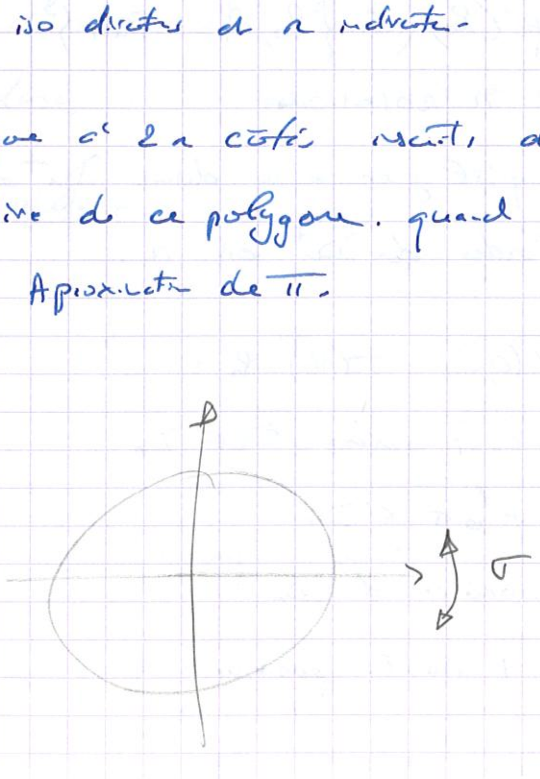
∃ n iso directes et n indirectes.

Exo 4 = polygone à 2n côtés inscrit dans $\mathcal{C}(0,1)$

Aire de ce polygone. quand $n \to +\infty$. tend vers l'aire du disque

Approximation de π.

Exo 3 : (Dev).



n pour

symétrie d'axes $P_\ell P_\ell$

sym. d'axes [Milieu $P_\ell P_{\ell+1}$, Milieu $P_\ell P_{\ell+1}$]

$\mathcal{E}$ affine euclidien orienté $(O, \vec{u}, \vec{v})$

$$\rho = r\left(O, \frac{2\pi}{n}\right)$$

$$\sigma = \mathrm{sym}_{\perp (O,\vec{u})}$$

Notation : $P_0 = O + \vec{u}$

$$P_k = \rho^k(P_0)$$

1) D_n^+ : le sous-groupe des isométries positives

$\forall k \in [\![0, n-1]\!] \quad P_k = \rho^k(P_0)$

$P_k = \rho(P_{k-1})$

comme ρ est la r...

$\rho^n = Id.$

donc $\rho(P_{n-1}) = \cancel{\rho}(P_0$

ρ est 1 rotation donc 1 iso+ , ρ conserve le polygone $P_0 \dots P_{n-1}$

$\rho \in D_n^+$

$\forall k \in [\![0, n-1]\!] \quad \rho^k \in D_n^+$

Réciproquement. si 1 isométrie positive conserve le polygone

alors elle conserve son centre O donc c'est 1 rotation. notée ρ'

ρ' est définie par l'image d'1 point autre que O

par exemple $\rho'(P_0) \in \{P_0, P_1, \dots P_{n-1}\}$

Au maximum n rotations.

On sait qu'il y en a n donc $D_n^+ = \{\rho^k \;\; k \in [\![0, n-1]\!]\}$

et l'ordre de D_n^+ est n.

2/ Soit σ la sym % à $(O, \vec{u})$ $\sigma(P_0) = P_0$

$\sigma(P_i) = P_{n-i}$ donc $\sigma \in D_n$

$\forall k \in [\![0, n-1]\!] \quad \rho^k \circ \sigma \in D_n.$

Soit α une isométrie de D_n.

1er cas = α est 1 isométrie positive.

d'après 1), α est de la forme ρ^k $k \in [\![0, n-1]\!]$

2ème cas : α est 1 iso ⊖

$\sigma \circ \alpha$ est une isom ⊕

donc d'après 1) elle est de la forme ρ^k

et $\sigma^{-1} = \sigma$

donc $\alpha = \sigma \circ \rho^k$

$\sigma \circ \alpha = \rho^k$

$\sigma^{-1} \circ \sigma \circ \alpha = \sigma \circ \rho^k \Rightarrow \alpha = \sigma \circ \rho^k$ car $\sigma^2 = \mathrm{Id}$

On a donc n iso ⊕ et n iso ⊖. L'ordre de $D_n = 2n$.

3) • ρ^k = rotation de centre O et d'angle $k\frac{2\pi}{n}$

• $\rho^k \circ \sigma$

Si : α est 1 rotation (de centre O et d'angle $\frac{\pi}{n}$), on a ~~$\sigma\circ\alpha$~~ $\sigma \circ \alpha$ est 1 iso ~~directe~~ indirecte

donc $\underbrace{\sigma \circ \alpha}_{?}$ est 1 symétrie

$\alpha \circ \sigma = (\alpha \circ \sigma)^{-1} = \sigma^{-1} \circ \alpha^{-1} = \sigma \circ \alpha^{-1}$

$\alpha \circ \sigma = (\alpha \circ \sigma)^{-1} = \sigma \circ \alpha^{-1}$

$\underbrace{\alpha \circ \alpha}_{\rho} \circ \sigma = \alpha \circ \sigma \circ \alpha^{-1}$

$\rho \circ \sigma = \alpha \circ \sigma \circ \alpha^{-1}$

récurrence $\rho^k \circ \sigma = \alpha^k \circ \sigma \circ \alpha^{-k}$

↳ s'appliq. à $\alpha^k(P_0)$

• On suppose que α est la rotation d'angle $\frac{\pi}{n}$

$\rho^k \circ \sigma = \alpha^{2k} \circ \sigma$

$= \alpha^k \circ \sigma \circ \alpha^{-k}$

c'est 1 symétrie, elle laisse O invariant et

$\alpha^k \circ \sigma \circ \alpha^{-k}(\alpha^k(P_0)) = \alpha^k \circ \sigma(P_0) = \alpha^k(P_0)$

donc $\alpha^k(P_0)$ est invariant et c'est la sym / $[O\alpha^k(P_0)]$

Cas 1 : ~~n quelconque~~ pair ∘ n impair ⊗

× k est pair $k = 2p$

$\rho^k \circ \sigma = \alpha^{2k} \circ \sigma$

$= \alpha^p \circ \sigma \circ \alpha^{-p}$ sym / $(O\alpha^p(P_0))$

⋮ (manque 1 bout)

• Si k impair

$n + k = 2p$ (somme est paire)

$\rho^k \circ \sigma = \rho^{2p-n} \circ \sigma$

<u>Cas</u> n pair

- k pair : id
- k impair

$k = 2l+1$

$\rho^{2l+1} \circ \sigma = \alpha^{2l+1} \circ \sigma \circ \alpha^{-2l-1}$

sym % [OR_k]

Isométrie laissant invariant les sommets.

(Pourquoi : 1 sommet est envoyé sur 1 sommet)

(+) Préserver les sommets.

préserver les sommets.

→ O est invariant. pourquoi ? (X)

avec les trajets, p! envoyé sur 1 coté

D_n est-il cyclique ?

tous les elts commutent ? est-ce vrai

Définition de <u>groupe cyclique</u>. $\exists k \in \mathbb{N} \quad \alpha^k = Id$

groupe fini tjrs le cas : ord(G)

⇓

engendré par 1 élément. (plus générateurs)

Ici, le générateur, soit c'est une rotation (1), soit une symétrie (2)

(2) Non, n'engendre pas car $\sigma^2 = Id$ multiple

sous-groupe engendré {Id, σ}

(1) par rotation ⇒ pas possible de faire une iso ⊖ avec des rotations.

XVII / Exercices sur les polygones.

Exercice 1 : Nonien Gom MPSI

Soit ABC, un triangle non applati. On note $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. $\hat{A} = \widehat{CAB} \in]0;\pi[$ $\hat{B} = \widehat{ABC}$ $\hat{C} = \widehat{BCA}$.

$p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ (demi-périmètre)

$S =$ l'aire du triangle ABC.

a) Montrer que $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$

b) En déduire la Formule de Héron

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

c) Montrer que $\dfrac{a}{\sin\hat{A}} = \dfrac{b}{\sin\hat{B}} = \dfrac{c}{\sin\hat{C}}$

Exercice 2 : Théorème de Van Aubel. Virelle

Soit ABCD, un quadrilatère convexe non plat. Soient L, M, N et P, les centres de gravité des carrés "extérieurs" à ABCD construits respectivement sur les côtés [AB] [BC], [CD] et [AD]. Alors $LN = MP$ et $(LN) \perp (MP)$.

Exercice 3 : Groupe Diedral. Gloundalos

Soit E, un plan affine euclidien orienté muni d'un repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, orthonormé direct.
Soit $n \in \mathbb{N}$, soit ρ la rotation de centre O d'angle $\frac{2\pi}{n}$ et soit σ, la symétrie orthogonale par rapport à l'axe $(O, \vec{u})$.
On pose $P_0 = O + \vec{u}$ et pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$,

$P_k = \rho^k(P_0)$.

On appelle groupe diédral et on note D_n, le groupe des isométries du plan qui envoient le polygone régulier à n côtés $\{P_0, P_1, \dots, P_{n-1}\}$ sur lui même.

1) Démontrer que les isométries directes forment dans D_n, un sous-groupe cyclique, engendré par ρ. Quel est l'ordre de ce sous groupe ?

2) Démontrer que tout élément de D_n est de la forme ρ^k ou $\rho^k \circ \sigma$ pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Quel est l'ordre de D_n ?

3) Caractériser géométriquement les éléments de D_n (distinguer 2 cas, selon la parité de n). Expliciter géométriquement le produit de 2 élts quelconques de D_n.

Exercice 4 : Approximation de π par la méthode d'Archimède.

Pour $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on note u_n l'aire d'un polygone régulier à 2^n côtés inscrits dans le cercle de $\mathbb{R}^2$ de centre $(0,0)$ et de rayon 1.

a) Etudier la vitesse de convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ vers π.

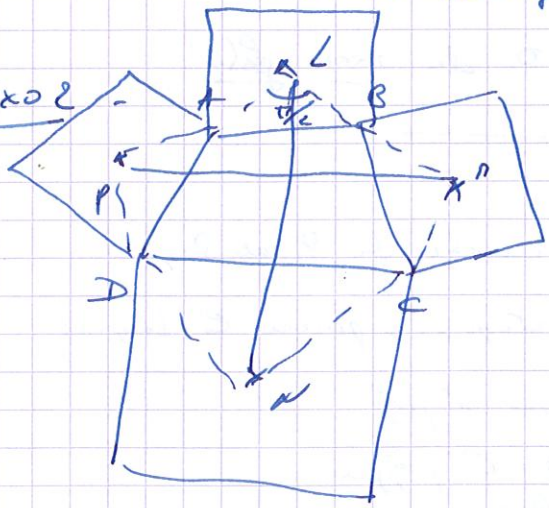
b) En déduire un algorithme d'approximation de π.

Exo 4 - suite définie par récurrence

élévation de π entre 2 rangs.

vitesse de convergence ?

Exo 2 -



$l-b = i(l-a)$

$m-c = i(m-b)$

$n-d = i(n-c)$

$p-a = i(p-a)$

$l = \dfrac{b-ia}{1-i}$, m, n, p ...

calcul : $\dfrac{l-n}{m-p} = i$ après calcul.

Exo 1 -

On fixe le périmètre, p. quel est celui de plus grand aire.

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$ p fixe, param a, b, c

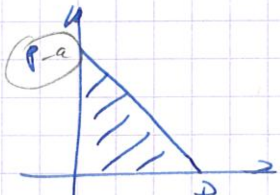
or on peut réduire $c = 2p-a-b$.) 1 Paramètre.

$S^2 = p(p-a)(p-b)(-p+a+b)$

fonction de a, b → quel ensemble $a \in]0, p[$

$b \in]0, p-a[$

positif et inégalité triangulaire.



Calcul des dérivées partielles, pts critiques

→ Min et max locaux

1 pt critique. max local.

justif du max global.

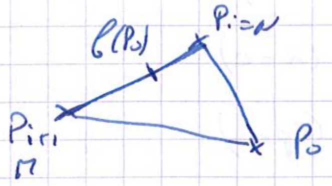
→ justif d'1 max global (et min global)

Sur 1 compact – (intérieur du triangle)

$[0, p]$, $[0, p-\varepsilon]$

→ atteint à l'intérieur.

sur le bord, ça vaut 0 donc max global.



$f(P_0)$ est convexe de P_i et P_{i+1}

Nouvelle rép., puisque la bijection

$N \to$ sur le polyg.

$M \to$ sur le polygone

et $f^{-1}(f(P_0)) = P_0$

d'où P_0 est barycentre de 2 pts des côtés

impossible.