317 Diagonalisation et trigonalisation.

Ex 1 : Réduction d'1 matrice à paramètres — Fearlon 2.6 p47

Pour quelles valeurs a, b, c, d la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$

est-elle diago.

idée : on ne demande pas de diago de de résoudre 6 systèmes

calcul de rang / noyau

Ex 2 Trigonaliser $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ — Rom... Analyse M1 p 74

idée valeur propre triple, E_2 de dim 1

construction d'1 base

Ex 3 Co-diagonalisation. — Fearlon ex 2.7 p49

A) 1°/ u, v diago dans E. Mq assez : 1) $\exists \mathcal{B}$ de E tq $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ et $Mat_{\mathcal{B}}(v)$ sont diagonales

2°/ $u \circ v = v \circ u$.

B) Soit A un ensemble non vide de $\mathcal{L}(E)$, dt ts les él's sont diagonalisables.

On suppose que $\forall (f, g) \in A^2$ $f \circ g = g \circ f$. Mq. $\exists \mathcal{B}$ de E tq

$\forall f \in A$, $Mat_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale.

DEV

Ex 4 Densité des matrices diagonalisables. Topologie naturelle — Saoussa p230 Algèbre

1) Établir que l'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{C})$ noté $(DG_n(\mathbb{C}))$

est dense dans $M_n(\mathbb{C})$

2) En déduire une démonstration du th de Cayley-Hamilton.

$\forall A \in M_n(\mathbb{C})$ $\chi_A(A) = 0$ où χ_A est le poly caract de $A \in M_n(\mathbb{C})$

Exercice 5 Résolution d'équation   Delaunay ex 29 p 227

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Déterminer le polynôme minimal de la matrice A

On étudie l'équation $M^2 - M = A$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

b) Justifier que les solutions de cette éq sont diagonalisables et obtenir les sp de celles-ci

c) Déterminer les matrices M solutions par l'introduction d'un polynôme annulateur.

Leçon 317 Diagonalisation et trigonalisation

Dev Théorème de Kronecker avec trigo et polyn. compagnon. (caldero)

1) Diagonalisation simultanée

Monier ex 2.5.12 p88

Fresnel ex 2.7 p45

2) Trigonalisation simultanée

1) Gourdon p 176.

2) Monier Algèbre MP 2.4.12 p78

3) Delaunay ex42 p176.

3) Trigonalisation exemples sur matrice 3x3.

Monier p72/73 cours Algèbre MP.

Fresnel ex p43. 2.5 $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ guidé

Prasolov ex 9.21 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Delaunay ex 12 p143 (3x3)

4) Réduction : condition de diag. $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ & 0 & 2 & c \\ & & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$ a, b, c, d.

Fresnel 2.6 p47

5) Matrices particulières

$A = \begin{pmatrix} b & a \\ a & -b \end{pmatrix}$ Fresnel p57, ex 2.10.

Delaunay ex 25 p158

6) Densité des matrices diagonalisables

Fresnel → densité de $GL_n(\mathbb{C})$ et {diago à vp simples} p105

Rombaldi p115 (02)

Gourdon

Sorosina avec démo de Cayley-Hamilton p230 Algèbre

7) Dunford utilisation

- Gourdon / Rombaldi Alg et Géom

- Rombaldi 01 p111

8) Diago simple, exemples

Delaunay ex 10 p140, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

9) Trigonalisation théorique, sur u^k avec λ vp.

Ex 11 p142 Delaunay

10) Variante sur les trigo simultanées

u, v d'1 $\mathbb{C}$ ev de dim finie $u \circ v - v \circ u = v$ Delaunay ex 43 p177

a) $\operatorname{Ker} v \neq \{0\}$

b) u possède 1 vp ds $\operatorname{Ker}(v)$

c) $\exists$ base de trigo commune à u, v ds laquelle v est triangulaire sup

11) Résolution d'équation (réduction)

Delaunay ex 44 p179 $M^2 - M = A$ $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ / Ex 58 p 227 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

12) Matrices symétriques dont on sait qu'elles sont diago?