315 Exercices illustrant l'utilisation de vecteurs propres et valeurs propres dans des domaines variés.

Exercice 1 Résolution d'équation matricielle.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Déterminer le polynôme minimal de la matrice A

On étudie l'équation $M^2 - M = A$ d'inconnue $M \in M_2(\mathbb{R})$

b) justifier que les sol° de cette éq. sont diagonalisables et déterminer les valeurs propres possibles

c) Déterminer les matrices M solutions

Delaunay Alg. MP ex 25 p 227

. polynôme annulateur
. diagonalisabilité
. Recherche du spectre

Exercice 2 Décomposition polaire

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in GL_n(\mathbb{R})$, on pose $B = {}^tAA$

Mq $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ ${}^tXBX > 0$

en déduire que toutes les valeurs propres de B sont > 0

2/ Mq $\exists C \in S_n(\mathbb{R})$ inversible tq $C^2 = B$

3/ En déduire qu'il existe $(H, C) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n(\mathbb{R})$ tq $A = HC$

Fresnel ex 3.8 p 90

ou Monier Alg MP ex 3.5.65 3.5.71

unicité / sous espaces propres (expl. cf Vetama)

Exercice 3. Résolution d'un système différentiel

Résoudre $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

d'inconnue $X : \mathbb{R} \to M_{4,1}(\mathbb{R})$

Monier Analyse MP p 463 (étude)

Solution de la forme $X(t) = \sum_{k=1}^{4} c_k e^{\lambda_k t} V_k$

Exercice 4 Suite définie par un système linéaire

Expliciter les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, (b_n) et (c_n)

avec

Gourdon Analyse p 12

a_0, b_0 et c_0 dans $\mathbb{K}$.

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n - 3b_n + 2c_n \\ b_{n+1} = -a_n + 5b_n - 2c_n \\ c_{n+1} = -a_n + 3b_n \end{cases}$$

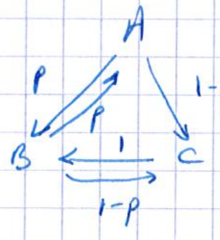
$X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

$A = PDP^{-1}$

$A^n = PD^nP^{-1}$

<u>Exercice 5</u> chaîne de Markov en probabilité

Rombaldi : OL p 477 (des var. aléatoires)



Une particule peut atteindre 3 niveaux d'énergie. On note A_n, B_n et C_n l'événement « la particule est en X après la n-ième étape ».

1/ Mq il existe $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$ $X_{n+1} = M X_n$

en déduire X_n en fonction de M, n et X_0

2/ Mq M admet 3 vp $1, \lambda_1, \lambda_2$ avec $-1 < \lambda_1, \lambda_2 < 0$

3/ Mq il existe un unique vecteur u_0 qui soit vecteur propre pour la vp 1 et dont la somme des coordonnées soit égale à 1

4/ On considère une base de vect. propres (u_0, u_1, u_2), Mq la première coordonnée de X_0 dans (u_0, u_1, u_2) est 1

5/ En déduire les suites (a_n), (b_n) et (c_n) sont convergentes et donner leur limite

<u>Exercice 6</u> Théorème de Kronecker — DEV

Rombaldi : AlG p 506
X-ENS T1 Alg 213
Caldero p 35

Soit P polynôme unitaire de $\mathbb{Z}[X]$ dont les racines complexes sont toutes de module ≤ 1. On suppose $P(0) \neq 0$.

Mq toutes les racines de P sont racines de l'unité leçon 315 : Exercices illustrant l'utilisation de vecteurs propres et de valeurs propres dans des domaines variés.

Exercice 1 : Grifone 27 p262

Préciser la nature des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ qui dans la base canonique sont représentés par la matrice

$$B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

Exercice 2 : Sorosina Algèbre p455

préciser :

- **un repère orthonormé dans lequel S admet une EC réduite,**
- **une EC réduite de S,**
- **la nature de S.**

$$2x^2 + 2xz + 2y^2 - 2yz + z^2 + 4x - 2y - 3z - 1 = 0.$$

Exercice 3 : Incontournables MP p274

Exercice 12.7 : Système différentiel d'ordre 3 (A trigonalisable)

Résoudre le système différentiel :

$$(S)\quad \begin{cases} 5x' = -x - 3y + 11z \\ 5y' = -10x + 5y + 10z \\ 5z' = 9x + 7y + z \end{cases}$$

Exercice 4 : Dantzer p423

Exercice 23.1 Une municipalité a décidé de proposer dans sa ville un service public d'automobiles électriques en libre service. Lors d'une expérience initiale, on installe quelques véhicules et 3 stations situées en 3 lieux stratégiques de la ville : place Archimède, place Bernoulli et place Cauchy. On peut effectuer avec tout véhicule un trajet de l'une des 3 places vers l'une des 2 autres. On observe plus particulièrement les trajets d'un véhicule. Après quelques mois d'expérience, on a pu établir que lorsque ce véhicule est place Archimède, l'utilisateur rejoint la place Bernoulli avec une probabilité $\frac{3}{4}$ ou la place Cauchy avec une probabilité $\frac{1}{4}$. Lorsque ce véhicule est place Bernoulli, l'utilisateur rejoint la place Archimède avec une probabilité $\frac{3}{4}$ ou la place Cauchy avec une probabilité $\frac{1}{4}$. Lorsque ce véhicule est place Cauchy, l'utilisateur rejoint la place Archimède avec une probabilité $\frac{1}{4}$ ou la place Bernoulli avec une probabilité $\frac{3}{4}$.

- On note A_0 (respectivement B_0 et C_0), l'événement : A l'instant de la mise en service, ce véhicule se trouve sur la place Archimède (respectivement place Bernoulli et place Cauchy).
- Pour tout entier n strictement positif, on note A_n (respectivement B_n et C_n), l'événement : ce véhicule se trouve place Archimède (respectivement place Bernoulli et place Cauchy) après le n-ième trajet.
- Pour tout entier naturel n, on note a_n, b_n et c_n les probabilités respectives des événements A_n, B_n et C_n et X_n le vecteur colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = MX_n.$$

2. En déduire pour tout entier naturel n, X_n en fonction de M, n et X_0.
3. Montrer que M admet trois valeurs propres réelles 1, λ_1 et λ_2 avec $-1 < \lambda_1 < \lambda_2 < 0$.
4. Montrer qu'il existe un unique vecteur u_0 que l'on déterminera qui soit vecteur propre pour la valeur propre 1 et dont la somme des coordonnées soit égale à 1.
5. On considère alors une base de vecteurs propres (u_0, u_1, u_2) où u_0 est le vecteur indiqué dans la question précédente. Montrer que la première coordonnée du vecteur X_0 dans la base (u_0, u_1, u_2) est égale à 1.
6. En déduire que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et calculer leur limite.

Exercice 5 = Kétrane p. 217

Énoncé

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) On suppose A inversible. Montrer qu'il existe un unique couple (O, S) tel que $A = OS$ avec O orthogonale et S symétrique définie positive.
2) Montrer que $\mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3) On suppose A non inversible. Montrer que A s'écrit $A = OS$ avec O orthogonale et S symétrique positive.