314 : Exercices illustrant l'utilisation du déterminant

Exercice 1 : Inversibilité d'une matrice TEU MPSI : 24.22

Trouver une CNS sur $a \in \mathbb{C}$ pour que

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1+a & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \\ \vdots & & \\ 1 & \cdots & 1+a \end{pmatrix} \text{ soit inversible}$$

Déterminer dans ce cas la matrice A^{-1}.

Modification lignes/colonnes
$\det A(a) = (n+a)\, a^{n-1}$
inversible si $a \neq 0$ et $a \neq -n$.
Résolution du système.

Exercice 2 Géométrie [illegible] 1.2.9 p66

Géométrie

Intersection de plans.

Soient P et P' les plans définis par :

P passe par $A(1,-1,0)$ et est dirigé par $\begin{cases} \vec{u}(2,1,-1) \\ \vec{v}(1,4,1) \end{cases}$

P' passe par $A'(1,2,1)$ — — $\begin{cases} \vec{u}'(0,2,-1) \\ \vec{v}'(1,-1,3) \end{cases}$

Montrer que P et P' se coupent suivant une droite D.

Déterminer un point et un vecteur directeur de D.

Exercice 3 : Étude de la comatrice

{ Monier MPSI Alg 9.8.1 p 292
{ Skandalis 7.7 p212

⚠ Énoncé modifié.

Soit $\mathbb{K}$ corps commutatif et $n \in \mathbb{N}$ tq $n \geq 2$. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1) Étudier le rang de la comatrice $\hat{A}$ de A

$rg(A) \leq n-2 \Rightarrow rg\, \hat{A} = 0$
$rg(A) = n-1 \Rightarrow rg\, \hat{A} = 1$
$rg(A) = n \Rightarrow rg\, \hat{A} = n$

2) Déterminer le déterminant de $\hat{A}$ (1)

$\det \hat{A} = (\det A)^{n-1}$

3) Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

4) Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ démontrer que $\widetilde{AB} = \tilde{A}\tilde{B}$.

(1) TEU MPSI : 24.27 p273

Exercice 4. Gram et distance d'un point à 1 sev. cf Dev

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ famille de vecteurs d'un espace préhilbertien réel.

a) Mq $A = (\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq n}$ est sym. def positif du même rang que la famille $(x_1, \dots, x_n)$

On le note $G(x_1, \dots, x_n)$

b) On suppose que $(x_1, \dots, x_n)$ est libre, $F = \mathrm{Vect}(x_1, \dots x_n)$

Soit $x \in E$, démontrer que

$$d(x, F)^2 = \frac{\det G(x, x_1, \dots x_n)}{\det G(x_1, \dots x_n)}$$

Exercice 5. Jacobien et variables aléatoires Rombaldi O2 p101

Soit $X = (X_1, X_2)$ une va de Laplace Gauss centrée à deux dimensions. X a pour densité f déf sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x_1, x_2) = \lambda e^{-q(x_1, x_2)/2}$$ avec q forme quadratique définie positive par $q(x_1, x_2) = a x_1^2 + 2b x_1 x_2 + c x_2^2$, $a > 0$, $c > 0$

et $ac - b^2 > 0$ et $\lambda > 0$ tq $\int_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = 1$

Jacobien pour le chgt de variable.

1/ Calculer λ.

2/ Calculer $\mathbb{E}(X)$ et la matrice de variance cov.

$$C(X) = \begin{pmatrix} \mathbb{V}(X_1) & \mathrm{cov}(X_1, X_2) \\ \mathrm{cov}(X_1, X_2) & \mathbb{V}(X_2) \end{pmatrix}.$$

Exercice 6 : Wronskien Rombaldi Analyse MP 8.4.18 / 8.4.19

A travailler !

TEU MP 17.10 p1101

Exercice + clair

a) Soient I intervalle de $\mathbb{R}$, $a, b : I \to \mathbb{R}$ continues et y solution de $y'' + ay' + by = 0$ sur I autre que 0. Mq les zéros de y sont isolés dans I p492

b) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $p_1, p_2 : I \to \mathbb{R}$ continues tq $p_2 \geq p_1$; $y_1 : I \to \mathbb{R}$ 2 fois dérivable tq $y_1'' + p_1 y_1 = 0$ et $y_1 \neq 0$

$y_2 : I \to \mathbb{R}$ ——— $y_2'' + p_2 y_2 = 0$

Démontrer qu'entre 2 zéros de y_1, il y a au moins 1 zéro de y_2