313 : Exercices illustrant l'utilisation des systèmes d'équations linéaires

Idée : utiliser TEU MPSI chap 23

Systèmes linéaires : définition avec et sans second membre.

interprétation en termes matriciels / vectoriels / application linéaire

formes linéaires (hyperplans)

Exercice 1 : Diagonalisation de matrice Gourdon Alg Ex 1 p 174

Diagonaliser M dans $M_n(\mathbb{C})$ et donner P

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Recherche des vecteurs propres par résolution de système.

Exercice 2 Géométrie TEU MPSI Ex 23.2 p1215 / X-ENS aussi mais détaillé

DEV

Etant donné n points de $\mathbb{R}^2$, on veut savoir si l'on peut trouver un polygone à n côtés dont ces points sont milieux des côtés

1) Résoudre le problème pour $n=3$
2) Résoudre le problème pour $n=4$
3) Résoudre dans le cas général
4) Déterminer si possible, l'inverse de la matrice du système rencontré

Il faut introduire l'affixe des points

$n=3$ ∃! solution

$n=4$ conditionnalité d'ordre 1

→ n impair existence et unicité sol.

→ n pair condition 1.

Exercice 3 base et image d'une appli linéaire ex 17 p 95 Gourdon

Soit f endo de $\mathbb{R}^3$ qui est représenté dans la base canonique par

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 4 & 11 & 3 \end{pmatrix}$$

Déterminer une base de l'image, du $\ker f$ et équation linéaire de f.

On résoud $AX=0$

$\dim \ker f = 1$

$\dim \operatorname{Im} f = 2$

2 vecteurs indep pour image $f(e_1)$ et $f(e_2)$

Exercice 4 Droites dans l'espace ... Ramis Géom p63

Ds l'espace E_3 muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ les droites

$$D_a \begin{cases} 2x + y - az + 2 = 0 \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases} \qquad D_b \begin{cases} x + y - 2z - 1 = 0 \\ x + by - z = 0 \end{cases}$$

a) Trouver une CNS sur (a,b) pour que D_a et D_b soient parallèles

b) Trouver une CNS sur (a,b) pour que D_a et D_b soient sécantes

Exercice 5. Etude de suites récurrentes Monier AG MP p106 (ex 312)

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) suites réelles définies par

$u_0 = 0$, $v_0 = 22$ et $w_0 = 22$

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{4}(2u_n + v_n + w_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + v_n + w_n) \\ w_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + v_n + 2w_n) \end{cases}$$

$\chi_A(\lambda) = (1-\lambda)\left(\frac{1}{12} - \lambda\right)\left(\frac{1}{4} - \lambda\right)$

diagonalisable

$\forall n \in \mathbb{N}$ $X_n = A^n X_0$
$= P D^n P^{-1} X_0$

cvg th vers 16

313 # Dev : les cailloux X ENS Alg 2 p56

1/ Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $a_{ii} = 0$ pour tout i et $a_{ij} \in \{\pm 1\}$ pour $i \neq j$. Si n est pair, montrer que A est inversible

2/ On dispose de $2n+1$ cailloux, $n \geq 1$. On suppose que chaque sous-ensemble de $2n$ cailloux peut se partager en 2 paquets de n cailloux de même masse totale. Montrer que tous les cailloux ont la même masse.

Sol : Montrer que A est inversible revient à montrer que le déterminant est non nul.

Idée, n pair, on va travailler dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et comme les coefficients sont dans -1 et 1, c'est une bonne idée.

La classe de $\det A$ modulo 2 est égale au déterminant de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

On additionne les $n-1$ premières colonnes à la dernière.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & n-1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & n-1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & & n-1 \\ & \ddots & \vdots \\ 1 & & n-1 \end{vmatrix} = (n-1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ & \ddots & \vdots \\ 1 & & 1 \end{vmatrix} \ (2)$$

$$= -1 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ & \ddots & \vdots \\ 1 & & 1 \end{vmatrix} \ (2) \text{ car } n \text{ est pair.}$$

On retranche cette dernière colonne à toutes les autres.

On obtient.

$$\det A = - \begin{vmatrix} -1 & & 0 & 1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & -1 & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(-1)^{n-1} = 1 \, (2)$$

donc A est inversible.

2°/ Notons $x_1, \dots, x_{2n+1}$ les masses de cailloux.

Soit i fixé. On peut trouver deux sous-ensembles disjoints A_i et B_i de $[\![1, 2n+1]\!] \setminus \{i\}$ de cardinal n tels que

$$\sum_{k \in A_i} x_k = \sum_{k \in B_i} x_k .$$

On renomme et ré-indice pour utiliser la question 1.

$$\sum_{j=1}^{2n+1} a_{ij} x_j = 0 \quad \text{où } a_{ii} = 0, \; a_{ij} = 1 \text{ si } j \in A_i$$
$$a_{ij} = -1 \text{ si } j \in B_j .$$

On a donc une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ de diagonale nulle et dont les coeff valent ± 1 telle que $AX = 0$

avec $X = (x_1, \dots x_{2n+1})$

Chaque ligne de A contient exactement n coeff égaux à 1

et n coeff égaux à -1.

Le vecteur $U = (1, \dots 1)$ est donc aussi dans $\operatorname{Ker} A$.

Or d'après la question 1) le mineur principal de taille $2n$ est non nul.

Donc le rang de A est $2n$ et $\dim \operatorname{Ker} A = 1$

Les vecteurs X et U sont proportionnels.

compléments = chaque ligne contient n "+1" et n "-1"

donc si l'on somme les colonnes à la première, on trouve

que $\det(A)=0$

De plus si l'on considère la sous-matrice M de A obtenue en enlevant la première colonne et la première ligne, alors M est une matrice d'ordre $2n$ avec 0 sur la diagonale et des nombres impairs partout ailleurs.

On envoie M dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et on a donc des 0 sur la diagonale et des 1 ailleurs.

Addition des colonnes à la 1ère, puis on se ramène à une matrice triangulaire. Det M est impair, il ne peut pas être nul.

Dès lors la matrice est de rang $2n$, son noyau de dim 1

or $(1,1,\dots 1)$ est dans le noyau.

- si $f \in \mathcal{J}_F$, d'après la question **b.**, on peut écrire $f = \sum_{i=1}^{k} a_i \circ f_i$, où les a_i sont des endomorphismes de E, et $f \in \mathcal{I}$ (car les f_i appartiennent à $\mathcal{I}$ et $\mathcal{I}$ est un idéal à gauche).

Remarque. Si p est un projecteur de direction F (c'est-à-dire $\operatorname{Ker} p = F$), on peut noter que

$$\mathcal{J}_F = \mathcal{L}(E) \circ p = \{f \circ p\ ;\ f \in \mathcal{L}(E)\}\ :$$

$\mathcal{J}_F$ est l'"idéal à gauche engendré par p".

Ce qui précède ne se généralise pas dans un espace vectoriel E de dimension infinie ; l'ensemble $\mathcal{J}$ des endomorphismes de E de rang fini est alors un idéal (bilatère) de $\mathcal{L}(E)$ qui n'est pas de la forme $\mathcal{J}_F$.

EXERCICE 3 :

C'est un paysan, l'a $2n+1$ vaches. Quand qu'y met d'côté l'une quelconque d'ses vaches, ben les $2n$ qui restent, y peut les répartir en deux sous-troupeaux de n vaches chacun et ayant le même poids total.

Montrer qu'les vaches, è z'ont toutes le même poids.

Source : Merci à Christophe HÉNOCQ

- - - - - - - - - - - -

Soient $p_1, \ldots, p_{2n+1}$ les poids des vaches (nommées $V_1, \ldots, V_{2n+1}$, c'est plus pratique que "Marguerite"). Soit $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_{2n+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n+1}$.

Traduisons l'hypothèse : pour tout $i \in [\![1, 2n+1]\!]$, les vaches V_j $(j \neq i)$ peuvent être réparties en deux sous-troupeaux de même effectif et de même poids total. Il existe donc des coefficients $a_{i,j}$ (avec $1 \leq j \leq 2n+1$) tels que

- **(1)** $a_{i,i} = 0$ (*la vache V_i part brouter dans son coin*) ;
- **(2)** $a_{i,j} = \pm 1$ si $j \neq i$; (*le signe dépend du sous-troupeau dans lequel on met la vache V_j*)
- **(3)** $\sum_{j=1}^{2n+1} a_{i,j} = 0$ (*les deux sous-troupeaux ont même effectif*)
- **(4)** $\sum_{j=1}^{2n+1} a_{i,j} p_j = 0$ (*les deux sous-troupeaux ont même poids total*).

Autrement dit, il existe une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ telle que

- **(1)** : les coefficients diagonaux sont nuls ;
- **(2)** : les autres coefficients valent ± 1 ;

• **(3)** : la somme des éléments de chaque ligne est nulle, ce qui revient à dire que $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ appartient au noyau $\operatorname{Ker} A$;

• **(4)** : la somme des éléments de chaque ligne, pondérés des coefficients p_j, est nulle, c'est-à-dire $P \in \operatorname{Ker} A$.

Nous allons montrer que toute matrice $A \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ vérifiant les conditions **(1)** et **(2)** est de rang $2n$, ce qui signifie que son noyau est de dimension 1. Les conditions **(3)** et **(4)** entraîneront alors que les vecteurs P et X_0 sont colinéaires, donc que les vaches ont toutes le même poids.

Soit donc une matrice $A \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ vérifiant les conditions **(1)** et **(2)**. Considérons la matrice extraite $B = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 2n}$ obtenue en ôtant la dernière ligne et la dernière colonne, et montrons qu'elle est inversible. Son déterminant est

$$D = \det(B) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{2n}} \varepsilon(\sigma)\, a_{1,\sigma(1)} \ldots a_{2n,\sigma(2n)} \;.$$

Les termes diagonaux étant nuls, les seuls termes non nuls du développement de ce déterminant sont ceux pour lesquels σ est un **dérangement** (permutation sans point fixe) de $[\![1, 2n]\!]$. Par ailleurs, chacun de ces termes non nuls vaut ± 1, donc le déterminant D est un entier relatif de même parité que le nombre de dérangements de l'ensemble $[\![1, 2n]\!]$. Si nous prouvons que ce nombre est impair, la démonstration est achevée.

Soit donc, pour tout k entier naturel non nul, d_k le nombre de dérangements de l'ensemble $[\![1, k]\!]$. Nous allons prouver la relation de récurrence

$$(\mathbf{R}) : \qquad d_k = (k-1)(d_{k-1} + d_{k-2}) \qquad (k \geq 3) \;.$$

Preuve de la relation **(R)** : soit $k \geq 3$, soit σ un dérangement de $[\![1, k]\!]$. Il y a $k-1$ choix possibles pour le nombre $j = \sigma(k) \in [\![1, k-1]\!]$. Deux possibilités s'excluent alors mutuellement :

- si $\sigma(j) = k$, alors la restriction de σ à l'ensemble $[\![1, k]\!] \setminus \{j, k\}$ est un dérangement d'un ensemble à $k-2$ éléments, il y en a d_{k-2} ;

- si $\sigma(j) \neq k$, le dénombrement est un peu moins évident. Introduisons pour cela l'ensemble $\mathcal{E}_j$ des dérangements de $[\![1, k]\!]$ tels que $\sigma(k) = j$ et $\sigma(j) \neq k$, puis l'ensemble $\mathcal{F}$ des dérangements de $[\![1, k-1]\!]$. A tout élément σ de $\mathcal{E}_j$, associons l'élément τ de $\mathcal{F}$ défini par $\begin{cases} \tau\big(\sigma^{-1}(k)\big) = j \\ \tau(p) = p \quad \text{si } p \neq \sigma^{-1}(k) \end{cases}$ (en quelque sorte, on "zappe" l'élément k). On voit facilement que la correspondance $\sigma \mapsto \tau$ est une bijection de $\mathcal{E}_j$ sur $\mathcal{F}$, la bijection réciproque est $\tau \mapsto \sigma$, avec $\begin{cases} \sigma\big(\tau^{-1}(j)\big) = k \\ \sigma(k) = j \\ \sigma(p) = \tau(p) \quad \text{sinon} \end{cases}$. Donc le cardinal de $\mathcal{E}_j$ est d_{k-1}, ce qui achève la démonstration.

Revenons à nos vaches... De la relation **(R)**, il résulte que $d_{2n-1} = (2n-2)(d_{2n-2} + d_{2n-3})$ est toujours un nombre pair, puis on montre par récurrence sur n que d_{2n} est impair :

- pour $n=1$, $d_2=1$;

- si d_{2n-2} est impair (pour $n \geq 2$), alors $d_{2n}=(2n-1)(d_{2n-1}+d_{2n-2})$ avec $2n-1$ impair, d_{2n-1} pair et d_{2n-2} impair, donc d_{2n} est impair, ce qui achève le troupeau.

****

Quelques compléments sur les dérangements, sans plus déranger les vaches qui finiraient par devenir folles...

La relation de récurrence **(R)** permet d'écrire une fonction récursive en MAPLE pour calculer le nombre d_n, not `der(n)` :

```
> der:= proc(n) option remember:
           if n=1  then 0
                   elif n=2 then 1
                   else (n-1)*(der(n-1)+der(n-2))
             fi
  end:
```

La relation **(R)** peut s'écrire $d_n - nd_{n-1} = -\big[d_{n-1}-(n-1)d_{n-2}\big]$; la suite de terme général $u_n = d_n - nd_{n-1}$ est donc géométrique de raison -1, d'où $u_n = d_n - nd_{n-1} = (-1)^n$ pour $n \geq 2$. On a donc, pour tout $k \geq 2$, la relation $\dfrac{d_k}{k!} - \dfrac{d_{k-1}}{(k-1)!} = \dfrac{(-1)^k}{k!}$. En sommant pour k de 2 à n, on obtient

$$d_n = n!\left(\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\right)$$

et, comme conséquence, l'équivalence $d_n \sim \dfrac{n!}{e}$.

EXERCICE 4 :

Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$, de degrés m et n respectivement.

1. Montrer que P et Q ont une racine commune si et seulement si la famille

$$(P, XP, \ldots, X^{n-1}P, Q, XQ, \ldots, X^{m-1}Q)$$

est liée dans $\mathbb{C}[X]$.

2. On pose $P = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k X^k$, $Q = \sum\limits_{j=0}^{n} b_j X^j$.

Écrire un déterminant qui s'annule si et seulement si P et Q ont une racine commune.

3. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme $P = X^3 + pX + q$ admette une racine double.