3.11 : Exercices illustrant la notion de rang

Exercice 1 : Adaptation Monier p247 MPSI

Méthode de Gauss

Calculer le rang de la famille $v_1\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\3\end{pmatrix}$ $v_2\begin{pmatrix}3\\4\\-3\\6\end{pmatrix}$ $v_3\begin{pmatrix}5\\0\\-1\\6\end{pmatrix}$

Exercice 2 : Formule du rang   TEU MPSI Ex18 p1105

Soit E, F, G 3 ev de dim finie. $u \in \mathcal{L}(E,F)$ $v \in \mathcal{L}(F,G)$

1) Mq $\operatorname{rg} v\circ u = \operatorname{rg} u - \dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} v)$
2) En déduire que $\operatorname{rg}(v\circ u) \geq \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v - \dim F$
3) Mq $\dim(\operatorname{Ker}(v\circ u)) \leq \dim(\operatorname{Ker} v) + \dim(\operatorname{Ker} u)$

Exercice 3 : Produit de matrices nilpotentes   Monier MPSI p244 8.1.26

1) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq A est nilpotente, $AB = BA$ et $B \neq 0$

Mq $\operatorname{rg}(AB) \leq \operatorname{rg}(B) - 1$

2) Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $A_1 \dots A_p \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotentes et qui commutent 2 à 2

Mq $\operatorname{rg}\left(\prod_{i=1}^{p} A_i\right) \leq (n-p)^+$

3) En déduire que si $A_1 \dots A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, nilpotentes et commutent 2 à 2 alors $\prod_{i=1}^{n} A_i = 0$

Exercice 4 : Application linéaire, rang de la somme   DEV

Monier MP* 1.4.16 p39

Soient E et F, 2 esp. vect de dim finie $f, g \in \mathcal{L}(E,F)$

Mq les 3 propriétés suivantes sont équivalentes

1) $rg(f+g) = rg(f) + rg(g)$

2) $\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(f+g)$ et $\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Im}\, g = \{0\}$

3) $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}\, g = E$ et $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Ker}(f+g)$

(Im, Ker, th rang, Grassmann)

Ex 5 . Système d'équations linéaires Gozlan p149

Discuter d'après les valeurs de $b, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ le système

$$\begin{cases} 2x + y - z = \alpha \\ y + 3z = \beta \\ 2x + by + 2z = \gamma \end{cases}$$

Notions Th de Rouché-Fontené, mineur d'ordre n

3// Compléments

1) Gourdon p139 : (formes linéaires) → rang dual.

4 [Gourdon p152 :

a) $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\tilde{A}$ sa comatrice.

Donner le rang de $\tilde{A}$ en fonction du rang de A

(*)

b) Si $n \geq 3$, résoudre dans $M_n(\mathbb{R})$ l'équation $A = \tilde{A}$

(Delaunay p108, ex 39) ++
RPH 195

3) Déterminant de Gram.

4) Rouvière PPS : 8.2.4 p254

a) Soit $A \in M_{n,p}(K)$. Mq par une suite finie d'op. élémentaires sur les colonnes et sur les lignes, on peut passer de A à $J_{n,p,r}$ où $r = rg(A)$

b) En déduire que $\forall (A,B) \in (M_{n,p}(K))^2$, les prop suivantes sont équivalentes

1) $rg(A) = rg(B)$

2) on peut passer de A à B par une suite finie d'op élts sur les colonnes et sur les lignes

c) Mq $\forall GL_n(K)$ la partie de formée par les matrices des op. élémentaires engendre $GL_n(K)$ | Leçon 171

Avec les comatrices et le rang.

5/ Rouvière PPS : 9.8.1 p292

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $A \in M_n(K)$

(*)

Démontrer que
$$\begin{cases} rg(A) \leq n-2 \Rightarrow rg(com(A)) = 0 \\ rg(A) = n-1 \Rightarrow rg(com(A)) = 1 \\ rg(A) = n \Rightarrow rg(com(A)) = n \end{cases}$$

6) Monier 9.8.3 p 292 MPSI

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq $rg(A) = n-1$

$B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq $AB = BA = 0$

démontrer $\exists\, \gamma \in \mathbb{K}$ $B = \gamma\, {}^t\mathrm{com}(A)$

7) Monier MP* 1.4.12 p39 + 1.4.13 p

a) Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ $C \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$

Mq $rg\begin{pmatrix} I_n & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = n + rg\, C$ Décomp $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$

i) Mq $n + rg(I_p - BA) = p + rg(I_n - AB)$

ii) En déduire $rg(I_n - AB) = n - p \iff BA = I_p$.

8) Delaunay, appl. linéaires p75, ex 9 (Alg-lin MP*)

Soit f endo d'1 espace E, de dim finie vérifiant $rg(f^2) = rg(f)$

a) Etablir que $\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}\, f$.

b) Mq $E = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f$.