310 Exercices d'algèbre linéaire faisant intervenir les polynômes

(DEV)

Exercice 1 : Résolution d'éq. matricielle

Rombaldi Alg RP ex 2.5.3 p88

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A^3 + A = 0$ et $A \neq 0$

Montrer que $A \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Passage sur $\mathbb{C}$
Spectre
Vect. propres
Matrice de passage

Exercice 2 : Trace et déterminant

Rombaldi Alg RP ex 2.4.9 p77
Delcourt RP p186

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tq $AB = BA$ et B nilpotente. Mq $A+B$ et A ont le même polynôme caractéristique en particulier

$\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}(A)$ et $\det(A+B) = \det A$

Prendre $\mathbb{C} \setminus Sp_{\mathbb{C}}(A)$
$\to A + \lambda I_n$ inversible
mq $\chi_{A+B} = \chi_A$

Les appl. polynomiales coïncident sur un partie infinie (continuité) dc $\chi_{A+B} = \chi_A$.

(cf Caldero Alg. p47 continuité de χ_A)

Exercice 3 : Diagonalisation d'un déterminant circulant

Gourdon ex 4 p190

On considère la matrice circulante

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & & & \\ a_2 & \cdots & a_n & a_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

En exprimant A comme un polynôme en la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

diagonaliser A.

(Delcourt ex 66 p 182 Algèbre RP)
$\to$ + explication -

Travail sur l'endomorphisme associé à J
- polynôme caractéristique et résolution d'1 pôl. $X^n - 1 = 0$ avec racines $n^{\text{ièmes}}$.

Exercice 4 : Résultant de 2 polynômes et application

1) Résultant a) Soit P et Q 2 polynômes non constants de $\mathbb{C}[X]$

Mq P et Q ont 1 facteur commun non constant ssi

$(\exists (A,B) \in \mathbb{C}[X],\ A \neq 0,\ B \neq 0),\ AP = BQ$ avec $\deg(A) < \deg Q$
$\deg(B) < \deg P$

b) $\forall r \in \mathbb{N}$, on note $\Gamma_r = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid \deg P = r\}$. Pour tout $m, n \in \mathbb{N}^*$ déterminer une fonction continue

$$R : \Gamma_m \times \Gamma_n \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$(P,Q) \longmapsto R[P,Q]$$

Vérifiant (P et Q premiers entre eux) $\Leftrightarrow$ $(R[P,Q] \neq 0)$

2/ Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On note D l'ensemble des matrices diagonalisables dans $M_n(\mathbb{C})$. Quel est $\mathring{D}$, intérieur de D

Gourdon p219
PS 6
→ Coy

raisonnement deg
divisibilité
dét
image réciproque d'1 ouvert
par une f° continue
diago, scindé-simple...

Exercice 5 : famille de polynômes orthogonaux (DcV)

$E = \mathbb{R}[X]$, $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ $\langle P \mid Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)\,Q(t)\,dt$

1/ Justifier que $\langle\ \mid\ \rangle$ est 1 produit scalaire sur E

2/ Mq $\exists ! (P_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ orthogonale telle que

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\deg P_n = n$ et P_n a pour coeff dominant 1

3/ $n \in \mathbb{N}^*$ et $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, justifier que
$$\int_{-1}^{1} P_n(t)\,R(t)\,dt = 0$$

4/ En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, P_n est scindé à racines simples et que celles-ci sont dans $[-1,1]$

Indice : on pourra construire $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tq $P_n R$ soit de signe constant sur $[-1,1]$.

Fresnel ex 3.1 p74
- def produit scalaire
- Gram Schmidt adapté
Par analyse-synthèse.
- racines simples.

210 compléments

X-ENS Algèbre T2 - Ex 2.17 p 90

Soit $A \in Gl_n(\mathbb{C})$, on suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tq A^p soit diagonalisable. Montrer que A est diago. La propriété subsiste-t-elle si A n'est pas inversible.

(Écriture du polynôme annulateur de A^p $(X-d_1)\dots(X-d_r)$ et celui de A est le suivant $(X^p-d_1)\dots(X^p-d_r)=0$. Dans $\mathbb{C}$, X^p-d est scindé à racines simples...)

X-ENS Algèbre T2 Ex 2.43 p 160 Equation de Sylvester. (++)

Soient A et $B \in M_n(\mathbb{C})$. A quelle condition l'équation

$AX - XB = Y$ a-t-elle une solution $X \in M_n(\mathbb{C})$, $\forall Y \in M_n(\mathbb{C})$

310

Résolution d'équation matricielle.

(Monier Alg M1 ex 2.5.3 p 88)

~~Delaunay p97~~

<u>Exercice</u>. Soient $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $A^3+A=0$ et $A \neq 0$

Montrer que $A \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

<u>solution</u>. $A^3+A = A(A^2+I_3)$

L'idée est de passer sur $\mathbb{C}$

On a donc A qui annule le polynôme scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$ car $A^3+A = A(A-iI_3)(A+iI_3)$

donc A est diagonalisable sur $M_3(\mathbb{C})$

et $sp_{\mathbb{C}}(A) \subset \{0, i, -i\}$

$\{0;i;-i\} \subset sp_{\mathbb{C}}(A)$: Si $sp_{\mathbb{C}}(A) = \{0\}$ alors A diagonalisable dans $M_3(\mathbb{C})$ et $A=0$ exclus

Donc on va prendre aussi les autres valeurs propres

- Si $i \in sp_{\mathbb{C}}(A)$ et notons V son vect. propre associé $SEP(A,i)$ alors $\bar{i} = -i$ est dans le spectre de A (sur $\mathbb{C}$) et $\bar{V} \in SEP(A,-i)$ car $A\bar{V} = \overline{AV} = \overline{iV} = -i\bar{V}$ et $\bar{V} \neq 0$

de même en échangeant i et $-i$.

donc $\{i, -i\} \subset sp_{\mathbb{C}}(A)$

Si $\{0\} \notin sp_{\mathbb{C}}(A)$ alors $A^2+I_3=0$

donc $(\det A)^2 = (\det A^2) = \det(-I_3) = -1$

contradiction car $\det A \in \mathbb{R}$.

d'où $sp_{\mathbb{C}}(A) = \{0, i, -i\}$ et $\dim SEP(A,\lambda) = 1$ sur $\mathbb{C}$

Notons U, V et $\overline{V}$ des vecteurs propres associés à $0, i, -i$

Solution 1), celle du Monier

on associe aux valeurs propres de A, les vecteurs

$$\omega_1 = \frac{1}{2}(v + \overline{v}) \quad \text{et} \quad \omega_2 = \frac{1}{2i}(v - \overline{v})$$

Montrons que $(u, \omega_1$ et $\omega_2)$ forment une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$

(d_1, d_2, d_3) trois élts de $\mathbb{R}$.

$d_1 u + d_2 \omega_1 + d_3 \omega_2 = 0$

$\Rightarrow a(d_1 u + d_2 \omega_1 + d_3 \omega_2) = 0$ soit a l'endo associé

$a(d_1 u) = d_1 a(u) = 0$ car $a(u) = 0 \times u = 0$

$\Rightarrow d_2 a(\omega_1) + d_3 a(\omega_2) = 0$

$\Rightarrow d_2 \frac{1}{2}(iv - iv) + \frac{d_3}{2i} \times 2i\, v = 0$ Pas clair

$\Rightarrow d_3 = 0$ car $v \neq 0$

on a $d_1 u + d_2 \times \frac{1}{2}(v + \overline{v}) = 0$

or $u, v, \overline{v}$ forment une base donc soit libres

$d_1 = d_2 = 0$

Donc on a fini (u, ω_1, ω_2) forment une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$

on a $\begin{cases} AU = 0 \\ A\omega_1 = \frac{1}{2}(iV - i\overline{V}) = -\omega_2 \\ A\omega_2 = \frac{1}{2i}(v + \overline{v}) = \omega_1 \end{cases}$

Soit P la matrice de passage de la base canonique de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ à la base (U, ω_1, ω_2)

$$A = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$$

Sol 2 Delaunay p ~~98~~ 97, ex 29

Comme les espaces ne sont pas réduits au vecteur nul

on regarde $\mathrm{Ker}(a^2 + id)$ et $\mathrm{Ker}(a)$

On pose e_1 vecteur propre de $\mathrm{Ker}(a^2+\mathrm{Id})$ et e_3 vect. p de $\mathrm{Ker}(a)$

et $e_2 = a(e_1)$

on a $a^2(e_1) + e_1 = 0$ $\qquad a(e_3) = 0$

donc $a^2(e_1) = -e_1$

$a(e_2) = -e_1$

Vérifions que $e = (e_1, e_2, e_3)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$

Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ tq $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = 0$

$\alpha_2 a(e_2) + \alpha_1 a(e_1) = 0 \qquad -\alpha_2 e_1 + \alpha_1 e_2 = 0$

et $-\alpha_2 a(e_1) + \alpha_1 a(e_2) = 0 \qquad -\alpha_2 e_2 - \alpha_1 e_1 = 0$

On ajoute les relat° en multipliant la première par α_2 et la seconde par α_1.

$-\alpha_2^2 e_1 + \alpha_1\alpha_2 e_2 - \alpha_1\alpha_2 e_2 - \alpha_1^2 e_1 = 0$

$-(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) e_1 = 0$

comme $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$

d'où $\alpha_3 e_3 = 0 \Rightarrow \alpha_3 = 0$

donc e_1, e_2, e_3 forme une base et la matrice est donc semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ en les renommant.

310 Correction de la résultante.

Trop compliqué

1°/ a) P et Q ont un facteur commun non constant

$\iff (\exists A, B \in \mathbb{C}[X]\ A \neq 0\ B \neq 0)$ tq $AP = BQ$ $\quad \deg A < \deg Q$, $\deg B < \deg P$

Preuve : $\Rightarrow$ supposons l'existence de $R \in \mathbb{C}[X]$, $\deg R \geq 1$, facteur commun à P et Q.

Soient $P_1, Q_1 \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = RP_1$, $Q = RQ_1$

Si $A = Q_1$ et $B = P_1$, on a $AP = ARP_1 = RQ_1P_1 = BQ$

avec $\deg A = \deg Q_1 < \deg Q$

et $\deg B = \deg P_1 < \deg P$

$\Leftarrow$ on va montrer non (1) $\Rightarrow$ non (2)

Supposons que P et Q n'aient aucun facteur commun non constant

ie $P \wedge Q = $ cte. Si par l'absurde $\exists A, B \in \mathbb{C}[X]$ $A \neq 0$, $B \neq 0$ tq

$AP = BQ$ et $\deg A < \deg Q$, $\deg B < \deg P$

on aurait d'après th de Gauss $P \mid B$

or $B \neq 0$, on aurait $\deg B \geq \deg P$ absurde.

b) $\forall r \in \mathbb{R}$, on note $\Gamma_r = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid \deg P = r\}$

$\forall m, n \in \mathbb{N}^*$ déterminer une fonction continue

$R : \Gamma_m \times \Gamma_n \to \mathbb{C}$

$(P, Q) \mapsto R[P, Q]$

vérifiant (P, Q premiers entre eux) $\iff R[P, Q] \neq 0$

Preuve : pour tout $r \in \mathbb{R}$, posons $P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k \in \Gamma_m$

$Q = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \Gamma_n$

D'après la question précédente,

P et Q ont un facteur premier non constant

$\iff \exists A, B \in \mathbb{C}[X]$ $A \neq 0$ $B \neq 0$ tq $AP = BQ$ $\quad \deg A < \deg Q$, $\deg B < \deg P$

$\iff$ les vecteurs $(P, XP, \dots, X^{n-1}P)$ et $(Q, XQ, \dots, X^{m-1}Q)$

forment une famille liée de $\mathbb{C}[X]$

$\iff \det(P, XP, \dots, X^{n-1}P, Q, XQ \dots X^{m-1}Q) = 0$

$\cancel{= \det_{\mathcal{B}}(P, XP, \dots X^{n-1}P, X^{m-1}Q, X^{m-2}Q, \dots, XQ, Q) = 0}$

avec $\mathcal{B}$ base canonique de $\mathbb{C}_{m+n-1}[X]$

$$\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^{m+n-1})$$

$$R[P,Q] = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & & a_m & & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & \dots & & a_0 & a_1 & \dots & a_m \\ b_0 & \dots & b_{n-1} & b_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_0 & \dots & b_{n-1} & b_n & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & b_0 & \dots & b_{n-1} & b_n \end{vmatrix} = 0$$

Ainsi défini, sur $P_m \times P_n$, R est une fonction continue de P et Q (car polynomiale en les coeff de P et Q)

P et Q sont premiers entre eux $\iff R[P,Q] \neq 0$

4) $n \geq 2$, $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Quel est $\mathring{\mathcal{D}}$, intérieur de $\mathcal{D}$?

$\Rightarrow$ $\mathring{\mathcal{D}}$ est l'ensemble Γ des matrices diagonalisables dont les valeurs propres sont toutes distinctes

Étape 1 : $\Gamma \subset \mathring{\mathcal{D}}$

$M \in \Gamma \iff \chi_M$ n'a que des racines simples

$\iff \chi_M$ et χ_M' (poly. caract dérivé) sont premiers entre eux

$\Rightarrow \mathrm{Res}[\chi_M, \chi'_M] \neq 0$

Or l'application $\varphi : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$

$$M \longmapsto \mathrm{Res}[\chi_M, \chi'_M]$$

est continue (q. poly) et $\Gamma = \varphi^{-1}(\mathbb{C}^*)$ donc Γ est 1 ouvert

(cù image réciproque d'1 ouvert par une fonction continue)

or $\Gamma \subset D$ donc $\Gamma \subset \mathring{D}$

Etape 2 : Mq $\mathring{D} \subset \Gamma$

Soit $M \in \mathring{D}$, supposons par l'absurde que $M \notin \Gamma$, cela signifie que M est diagonalisable et qu'elle admet une valeur propre multiple λ. $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ tq

$$P^{-1}MP = \mathrm{diag}(\lambda, \lambda, \lambda_3, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ & \lambda & & \\ & & \lambda_3 & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Pour tout entier $p > 0$, on pose

$$M_p = \begin{pmatrix} \lambda & 1/p & & 0 \\ & \lambda & & \\ & & \lambda_3 & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$ qui n'est pas diagonalisable sinon la restriction

de M_p aux 2 premiers vecteurs de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ qui est $\begin{pmatrix} \lambda & 1/p \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ serait diagonalisable

C'est absurde car sinon cette dernière serait semblable à λI_2 donc égale à I_2

Mais $PM_pP^{-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M$ donc M est limite d'une suite de matrices n'appartenant pas à D, donc $\underline{M \notin \mathring{D}}$

donc $M \in \Gamma$