110 Polynômes d'endomorphisme (dev) — Rouvière 83/85 (Diagonalisation)

Théorème Soit E un $\mathbb{K}$ev de dim finie, $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour que f soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé sur $\mathbb{K}$ à zéros simples tel que $P(f) = 0$

1) Supposons f diagonalisable

Soit $N = \mathrm{Card}(Sp_{\mathbb{K}}(f))$ $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ $\lambda_i \in Sp(f)$ λ_i 2 à 2 distincts

il existe alors une base $\mathcal{B}$ de E tel que A matrice de f ds $\mathcal{B}$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N I_{d_N} \end{pmatrix} \quad \text{avec } \forall k \in \{1, \dots, N\} \ d_k = \dim(SEP(f, \lambda_k))$$

Soit $P = \prod_{k=1}^{N} (X - \lambda_k)$ scindé à racines simples.

$$P(A) = \prod_{k=1}^{N} (A - \lambda_k I_n) = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & (\lambda_2 - \lambda_1) I_{d_2} & \\ & & \ddots \\ & & & (\lambda_k - \lambda_N) I_{d_k} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} (\lambda_1 - \lambda_N) I_{d_1} & & 0 \\ & (\lambda_2 - \lambda_N) I_{d_2} & \\ 0 & & \ddots & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 0$$

Ainsi $\exists P \in \mathbb{K}[X]$ scindé simple et annulateur de f

b) Réciproquement. Supposons qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé simple tel que $P(f) = 0$

$\exists \alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, $p \in \mathbb{N}^*$ $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ 2 à 2 distincts tel que

$$P = \alpha \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)$$

Posons $\forall k \in \{1, \dots, p\}$ $A_k = \prod_{\substack{1 \le j \le p \\ j \ne k}} (X - \lambda_j)$.

Comme $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont 2 à 2 distincts

$$\forall k \in [\![1, p]\!] \quad A_k(\lambda_k) = \prod_{\substack{1 \le j \le p \\ j \ne k}} (\lambda_k - \lambda_j) \ne 0$$

Notons $u_k = \dfrac{1}{A_k(\lambda_k)} \in \mathbb{K} \quad \forall k \in [\![1,p]\!]$

Considérons le polynôme $1 - \sum_{k=1}^{p} u_k A_k$ de degré $\leq p-1$

Il s'annule en $\lambda_1, \dots \lambda_p$ car

$\forall j \in [\![1,p]\!] \quad \left(\sum_{k=1}^{p} u_k A_k\right)(\lambda_j) = u_j A_j(\lambda_j) = 1$

$$\begin{cases} \text{car } \underline{2 \text{ cas}} & u_j A_j(\lambda_j) = \dfrac{A_j(\lambda_j)}{A_j(\lambda_j)} = 1 \\ \text{et } j \neq i & u_i A_i(\lambda_j) = \prod_{\substack{1 \leq j \leq p \\ j \neq i}} (\lambda_j - \lambda_j) = 0 \end{cases}$$

donc $\sum_{k=1}^{p} u_k A_k = 1$

Passons aux endomorphismes $e = 1(f) = \sum_{k=1}^{p} u_k A_k(f)$

Soit $x \in E$, $x = e(x) = \left(\sum_{k=1}^{p} u_k A_k(f)\right)(x) = \sum_{k=1}^{p} u_k (A_k(f))(x)$

Notons $x_k = u_k (A_k(f))(x)$

donc $x = \sum_{k=1}^{p} x_k$ et $\forall k \in [\![1,p]\!]$

$(f - \lambda_k e)(x_k) = (X - \lambda_k)(f)\left(u_k(A_k(f))(x)\right)$

$= \left(u_k (X - \lambda_k) A_k\right)(f)(x)$

$= (\alpha^{-1} P)(f)(x) = 0(x) = 0$

donc $\forall k \in [\![1,p]\!] \quad x_k \in \ker(f - \lambda_k e)$

d'où $E = \sum_{k=1}^{p} \ker(f - \lambda_k e)$

Or $Sp(f) \subset \{\lambda_1, \dots \lambda_p\}$ et $\forall k \in [\![1,p]\!]$ tel que $\lambda_k \notin Sp(f)$

on a $\ker(f - \lambda_k e) = \{0\}$

Soit $\sum_{\lambda \in Sp(f)} SEP(f, \lambda) = \sum_{k=1}^{p} \ker(f - \lambda_k e) = E$

d'où f est diagonalisable