Théorème de Weierstraß probabiliste

source
TEU RP* (931)
Rombaldi O2
p 488

aussi : Escoffier p 179
(8.3)

Théorème : Soit f fonction de $[a,b] \to \mathbb{R}$ continue

La fonction f est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales sur $[a,b]$

Pré-requis : X va réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{T}(\Omega), \mathbb{P})$

$X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$, $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- le théorème du transfert. La variable aléatoire $f(X)$ est intégrable (i.e. X admet une espérance) ssi la série $\sum_{i \in I} p_i f(x_i)$ est absolument convergente et dans ce cas

$$E(f(X)) = \sum_{i \in I} p_i f(x_i)$$

- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev : Si X est de carré intégrable (X^2 admet 1 espérance), on a alors

$$\mathbb{P}(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2} \quad \forall \varepsilon > 0 \ (\varepsilon \in \mathbb{R})$$

(Rombaldi)

On note $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$

On simplifie légèrement le problème. $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$

Soit $x \in [0,1]$, on considère une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables de Bernoulli de paramètre x, indep.

$\forall n \geq 1$, on pose $Y_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$

1°/ $\varepsilon > 0$

a) Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall (t,u) \in [0,1]^2 \quad |f(t) - f(u)| \leq r(t-u)^2 + \varepsilon$$

b) En déduire que $|E(f(Y_n)) - f(x)| \leq r\, V(Y_n) + \varepsilon \leq \frac{r}{4n} + \varepsilon$

2/ On considère les polynômes de Bernstein

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

La suite $(B_n(f))$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$

1/ a) f est uniformément continue sur $[0,1]$ car continue sur un compact (Heine)

$\exists \eta > 0$ tel que

$$\forall (t,u) \in [0,1]^2 \quad |t-u| \leq \eta \Rightarrow |f(t)-f(u)| \leq \varepsilon$$

- Soit $(t,u) \in [0,1]^2$

2 possibilités :

- soit $|t-u| \leq \eta$ alors $|f(t)-f(u)| \leq \varepsilon$
- soit $|t-u| > \eta$ alors $\dfrac{(t-u)^2}{\eta^2} > 1$

donc $|f(t)-f(u)| \leq 2\|f\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty \dfrac{(t-u)^2}{\eta^2}$

$\varepsilon > 0$ et $2\|f\|_\infty \dfrac{(t-u)^2}{\eta^2} > 0$, d'où

$$|f(t)-f(u)| \leq 2\|f\|_\infty \frac{(t-u)^2}{\eta^2} + \varepsilon$$

$M = \dfrac{2\|f\|_\infty}{\eta^2}$ convient.

b) la variable aléatoire Y_n

vérifie l'égalité $|f(Y_n) - f(x)| \leq 2\|f\|_\infty \dfrac{(Y_n-x)^2}{\eta^2} + \varepsilon$

$$|f(Y_n) - f(x)| \leq 2M (Y_n - x)^2 + \varepsilon$$

La variable aléatoire Y_n est finie, il en est de même pour $f(Y_n)$ et $(Y_n-x)^2$ qui sont donc d'espérance finie.

Par croissance et linéarité de l'espérance :

$$|\mathbb{E}(f(Y_n) - f(x))| \leq \mathbb{E}(|f(Y_n) - f(x)|)$$

$$\leq \mathbb{E}(M|Y_n - x|^2 + \varepsilon)$$

$$= M\,\mathbb{E}\left((Y_n - x)^2\right) + \varepsilon \quad (1)$$

On pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$, la variable S_n somme de lois de Bernoulli, iid, de paramètre x suit une loi binomiale de paramètre (n, x)

donc $\mathbb{E}(Y_n) = \frac{1}{n} E(S_n) = \frac{nx}{n} = x$

d'où $\mathbb{E}\left((Y_n - x)^2\right) = \mathbb{V}(Y_n)$ par définition avec $x = \mathbb{E}(Y_n)$

de (1) $\left|E(f(Y_n)) - f(x)\right| \leq M\, \mathbb{V}(Y_n) + \varepsilon$

et $\mathbb{V}(Y_n) = \frac{1}{n^2} \mathbb{V}(S_n) = \frac{nx(1-x)}{n^2} = \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{1}{4n}$ (max $\frac{1}{2}$)

d'où $\left|\mathbb{E}(f(Y_n)) - f(x)\right| \leq \frac{M}{4n} + \varepsilon$

2/ On a $f(Y_n) = f\left(\frac{S_n}{n}\right)$

Par le théorème de transfert, appliqué à $S_n \sim \mathcal{B}(n, x)$

$$\mathbb{E}(f(Y_n)) = \mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \mathbb{P}(S_n = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = B_n(f)(x)$$

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$

$$\left| B_n(f)(x) - f(x) \right| \leq \frac{M}{4n} + \varepsilon$$

Quand $n \to +\infty$, $\frac{M}{4n} \xrightarrow[+\infty]{} 0$, donc $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n > n_0 \quad \frac{M}{4n} \leq \varepsilon$$

Donc $\forall n > n_0 \quad \forall x \in [0,1] \quad \left|B_n(f)(x) - f(x)\right| \leq 2\varepsilon$

Comme $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, la suite de fonctions polynomiales $(B_n(f))$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.