Delaunay
NP p23

# Variante de Raabe - Duhamel

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suite de réels strictement positifs tq

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{+\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{avec} \quad \alpha\in\mathbb{R}$$

a) Justifier qu'il existe $A>0$ pour lequel

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{A}{n^\alpha}$$

b) Cvg de $\sum (-1)^n u_n$

Sol

a) d'après la forme proposée, on va étudier $(n^\alpha u_n)$

et on utilise le lien suite - série

$(u_n)$ et $\left(\sum u_{n+1}-u_n\right)$ de même nature

soit $v_n = n^\alpha u_n$ pour $n\geq 1$

$$\begin{aligned}
\ln v_{n+1} - \ln v_n &= \alpha \ln(n+1) - \alpha \ln n + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)\\
&= \alpha \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)\\
&= \alpha \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1-\frac{\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&\underset{+\infty}{=} \alpha\left(\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \left(-\frac{\alpha}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

donc la série télescopique $\sum(\ln v_{n+1} - \ln v_n)$ est absolument convergente donc la suite $(\ln v_n)$ cvg vers $\ell$

$$n^\alpha u_n = e^{\ln v_n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} e^\ell$$

On note $A = e^\ell > 0$

b) La série $\sum (-1)^n u_n$ n'est pas de signe constant, un équivalent ne suffit pas.

Par contre si $\alpha\leq 0$, le terme $(-1)^n$ ne tend pas vers 0

13

donc la série diverge.

Lorsque $\alpha > 0$ $\quad \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ à partir de $N$

car $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \sim -\frac{\alpha}{n} < 0$

La suite $(u_n)$ est décroissante de limite nulle, le TSSA assure la convergence de $\sum (-1)^n u_n$