Topologie matricielle

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n \geq 1$

I Continuité du polynôme caractéristique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on se place dans l'espace vectoriel normé $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ muni de la norme produit $\|A\| = \max_{i,j} |a_{ij}|$

L'espace vectoriel normé $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes complexes de degré $\leq n$ est vu comme un $\mathbb{K}$-ev de dim $n+1$

Mq la fonction polynôme caractéristique est continue.

$$\chi : \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}_n[X] \\ A \mapsto \chi_A = \det(XI_n - A) \end{array}$$

Solution : χ est continue ssi chacune de ses applications composantes l'est aussi, ie chacun des coeff devant les X^i $i \in [\![0,n]\!]$ dans χ_A est une fonction continue en les coefficients de A.

C'est clair car le déterminant n'utilise que des opérations polynomiales

$$\chi_A = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\sum_{|I|=k} \det A_I \right) X^{n-k}$$

avec A_I matrice extraite de A en ne prenant que les termes indicés par une partie $I \subset \{1, \dots, n\}$.

II Densité de $GL_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1) Mq $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

2) En déduire que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ pour deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Solution : 1/ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on va approcher A par des matrices inversibles

On perturbe A de sorte que le dét. de la matrice perturbée soit non nul et ce pour une perturbation infiniment petite.

Soit $A_\varepsilon = A + \varepsilon I_n$ avec ε petit

Le déterminant de A_ε est un polynôme en ε sur le corps $\mathbb{K}$, donc admet un nombre fini de racines.

Par conséquent, au voisinage de $]-\frac{1}{N}, \frac{1}{N}[$ de 0 qui ne contient aucune racine de P (sauf peut-être en 0), la suite $\left(A_{\frac{1}{p}}\right)_{p \geq N}$

est alors dans $GL_n(\mathbb{K})$ et tend vers A

$$\|A_{\frac{1}{p}} - A\| = \left\|\frac{1}{p} I_n\right\| = \frac{1}{p}\|I_n\| \longrightarrow 0$$

2/ Le résultat est clair si A est inversible

$$\chi_{AB} = \det(XI_n - AB) = \det\left(A(XA^{-1} - B)\right) = \det A \det(XA^{-1} - B)$$
$$= \det(XA^{-1} - B)\det A = \det\left((XA^{-1} - B)A\right) = \det(XI_n - BA)$$
$$= \chi_{BA}$$

Par densité de $GL_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et la continuité de χ

soit (A_n) suite de matrices inversibles $\to A$

$$A_n B \longrightarrow AB$$

$$\text{d'où } \chi_{AB} = \lim \chi_{A_n B} = \lim \chi_{BA_n} = \chi_{BA}.$$

III Densité de $GL_n(\mathbb{Q})$ dans $GL_n(\mathbb{R})$

Montrer que $GL_n(\mathbb{Q})$ est dense dans $GL_n(\mathbb{R})$

Solution : Soit $P \in GL_n(\mathbb{R})$, on cherche à approcher par des matrices inversibles rationnelles.

Soit une matrice de perturbation ε. Puisque $\det P \neq 0$ et par continuité du déterminant

· pour E assez petit $P+E$ est inversible

Il suffit de prendre E_{ij} de sorte que $p_{ij}+E_{ij} \in \mathbb{Q}$.

Ce qui est toujours possible car $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

IV Densité des matrices diagonalisables dans $M_n(\mathbb{C})$

1) Mq les matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{C})$ sont denses.

2) Qu'en est-il du cas réel ?

Solution : Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, on peut la trigonaliser, donc elle s'écrit dans une certaine base sous la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{avec } \lambda_i \text{ vp}.$$

On va perturber la diagonale pour que les nouvelles vp soient distinctes (ce qui est 1 critère de diagonalisabilité)

Fixons p un entier qui va servir à borner la perturbation par $\frac{1}{p}$

On construit de proche en proche des réels $\varepsilon_1^{(p)}, \dots, \varepsilon_n^{(p)}$ de la manière suivante :

on prend $\varepsilon_1^{(p)} = \frac{1}{p}$

on suppose construit $\varepsilon_1^{(p)}, \dots \varepsilon_{k<n}^{(p)}$, on prend un $0 \leq \varepsilon_{k+1}^{(p)} < \frac{1}{p}$ distincts des k valeurs $\lambda_i + \varepsilon_i^{(p)} - \lambda_{k+1}$ pour $i \in [\![1,k]\!]$

Ainsi la matrice $A_p = A + \begin{pmatrix} \varepsilon_1^{(p)} & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon_n^{(p)} \end{pmatrix}$

a toutes ses valeurs propres $\lambda_i + \varepsilon_i^{(p)}$ distinctes par construction des $\varepsilon_i^{(p)}$ donc est diagonalisable.

De plus $\| A_p - A \|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} \varepsilon_1^{(p)} & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon_n^{(p)} \end{pmatrix} \right\| = \max\limits_{i \in [\![1,n]\!]} |\varepsilon_i^{(p)}| \leq \frac{1}{p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$

la suite $(A_p) \longrightarrow A$ CQFD

2/ le résultat est faux dans $M_n(\mathbb{R})$. Contre-exemple

$A \in M_2(\mathbb{R})$ compagnon du polynôme caractéristique sans racines réelles

par ex $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ compagnon de X^2+1

Soit δ_A le discriminant du polynôme caractéristique.

$$\delta_{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}} = \operatorname{disc} \begin{vmatrix} X-a & -c \\ b & X-d \end{vmatrix} = \operatorname{disc} \left| X^2 - (a+d)X + ad - bc \right|$$
$$= (a+d)^2 - 4(ad-bc)$$
$$= (\operatorname{Tr} A)^2 - 4 \det A$$

qui est continue, $\delta_A < 0$

Si A s'approchait par des matrices D_k diagonalisables dans $M_2(\mathbb{R})$

χ_{D_k} serait scindé dans $\mathbb{R}$ donc $\delta_{D_k} \geq 0$ et par continuité,

on aurait $\delta_A \geq 0$