# Topologie dans les espaces vectoriels normés

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite d'éléments de $(E, \|\cdot\|)$. On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

<u>converge vers</u> $\ell$ de $E$ si la suite réelle $(\|x_n - \ell\|)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N}\quad n\geq N \Rightarrow \|x_n - \ell\| < \varepsilon$$

<u>Prop</u> : unicité de la limite

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $E$, ainsi que $\ell_1$ et $\ell_2 \in E$.

Si $x_n \to \ell_1$ et $x_n \to \ell_2$ alors $\ell_1 = \ell_2$

<u>Rq</u> : l'ensemble des suites convergentes est un sev de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, E)$ suite à valeurs dans $E$.

<u>Prop</u>. Si une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell$, alors la suite de tg $\|x_n\|$ converge vers $\|\ell\|$

<u>preuve</u> : $\big|\, \|x\| - \|\ell\| \,\big| \leq \underbrace{\|x - \ell\|}_{\to 0}$

<u>Cor</u> : Toute suite convergente est bornée.

## I Suites extraites, valeur d'adhérence

On appelle suite extraite ou sous-suite d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, toute suite de la forme $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ où $\varphi$ application strictement croissante de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$.

<u>Prop</u> Toute sous-suite d'une suite convergente est convergente et a la même limite.

**Def** : on appelle <u>valeur d'adhérence</u> d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tout élément de $E$ qui est limite d'une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

**Prop** : caractérisation des valeurs d'adhérence

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans $E$, et $x \in E$

Alors $x$ est valeur d'adhérence de $(x_n)$ <u>ssi</u>

$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall n_0 \in \mathbb{N} \ \exists n \geq n_0 \ \|x_n - x\| < \varepsilon .$$

## II Topologie

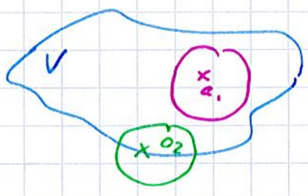
Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé.

**Def** : On appelle <u>boule ouverte</u> (resp fermée) de centre $a \in E$ et de rayon $r \in \mathbb{R}_+^*$, l'ensemble $B(a,r)$ (resp $\overline{B}(a,r)$ ou $B_f(a,r)$) définie par
$$B(a,r) = \{ x \in E, \ \|x-a\| < r \}$$

**Def** : Soit $(E, \|.\|)$ evn, $V \subset E$ et $a \in E$

On dit que $V$ est un voisinage de $a$ (dans $E$) si $V$ contient une boule ouverte de centre $a$, c.a.d $\exists r \in \mathbb{R}_+^*$ tq $B(a,r) \subset V$

**Ex** :




$V$ voisinage de $a_1$ mais pas de $a_2$

**Prop** : Soient $(E, \|.\|)$ evn et $a \in E$

1) Une réunion quelconque de voisinages de $a$ est un voisinage de $a$
2) Une intersection finie de voisinages de $a$ est un voisinage de $a$

**Preuve** 1) $I$ ensemble non vide, $(V_i)$ voisinage de $a$

$\forall i \in I \quad V_i \subset \bigcup_I V_i$, donc $\bigcup_I V_i$ est 1 voisinage de $a$

2) $V_1, .., V_n$ voisinages de $a$

$\forall k \in [\![1,n]\!]$ , $\exists r_k \in \mathbb{R}_+^*$ tq $B(a,r_k) \subset V_k$

posons $r = \min_{k\in[\![1,n]\!]} r_k$ alors $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $B(a,r) = \bigcap_{i=1}^n B(a,r_k) \subset \bigcap_{k=1}^n V_k$

donc $\bigcap_{i=1}^n V_k$ est un voisinage de $a$.

Rq Une intersection quelconque n'est pas forcément un voisinage de $a$.

Par ex, $(\mathbb{R}, |.|)$ , $(]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[)$ famille de voisinages de $0$

or $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} ]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[ = \{0\}$ qui n'est pas un voisinage de $0$

Def - Soit $(E, \|.\|)$ evn et $U \subset E$. On dit que U est un ouvert de E si U est voisinage de chacun de ses points :

$$\forall u \in U \quad \exists r \in \mathbb{R}_+^* \quad B(u,r) \subset U$$

On dit que F est un fermé de E si le complémentaire de F dans E noté $E \setminus F$ est un ouvert de E.

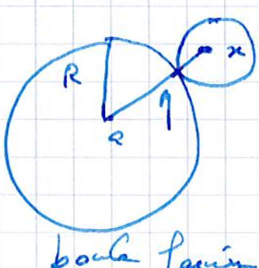
Premières prop. Th de Dedekind / Hausdorf

1) Toute boule ouverte est un ouvert de E
2) Toute boule fermée est un fermé de E
3) Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert de E
4) Une intersection finie d'ouverts est un ouvert de E
5) Une réunion finie de fermés est un fermé de E
6) Une intersection quelconque de fermés est un fermé dans E.

Preuve:

1)

boule ouverte



boule fermée

Soient $a \in E$ et $R \in \mathbb{R}_+^*$ . .

Montrons que $B(a,R)$ est un ouvert.

Soit $x \in B(a,R)$, notons $\eta = \|x-a\|$

alors $\eta < R$ car $x \in B(a,R)$

mq $B(x, R-\eta) \subset B(a,R)$

Soit $y \in B(x, R-\eta)$ alors $\|x-y\| < R-\eta$

donc $\|y-a\| = \|y-x+x-a\| \leq \|y-x\| + \|x-a\|$

$< R-\eta+\eta = R$

donc $y \in B(a,R)$, $B(a,R)$ est un ouvert de $E$.

2°/ $a \in E$, $R \in \mathbb{R}_+^*$, mq $\overline{B}(a,R)$ est un fermé de $E$, ie $E \setminus \overline{B}(a,R)$ est un ouvert.

Soit $x \in E \setminus \overline{B}(a,R)$, notons $\eta = \|x-a\|$

alors $\eta > R$ car $x \notin \overline{B}(a,R)$

Mq $B(x, \eta-R) \subset E \setminus \overline{B}(a,R)$

soit $y \in B(a, \eta-R)$, alors $\|x-y\| < \eta - R$

donc $R < \eta - \|x-y\|$

$\|x-a\| = \|x-y+y-a\| \leq \|x-y\| + \|y-a\|$

$\|y-a\| \geq \|x-a\| - \|x-y\|$

$> \eta + (R-\eta) = R$

donc $y \notin \overline{B}(a,R)$ et $y \in E \setminus \overline{B}(a,R)$

$E \setminus \overline{B}(a,R)$ est un ouvert de $E$.

3°/ $I$ un ensemble et $(U_i)_{i\in I}$ famille d'ouverts de $E$. Mq $\bigcup_{i\in I} U_i$ est un ouvert de $E$. (voisinage de chacun de ses points)

Soit $x \in \bigcup_{i\in I} U_i$, alors $\exists i \in I$ tq $x \in U_i$. Or $U_i$ est un ouvert de $E$ donc un voisinage de $x$ et $U_i \subset \bigcup_{i\in I} U_i$

donc $\bigcup_{i\in I} U_i$ est un voisinage de $x$.

4°/ $(U_1, \dots U_n)$ famille de $n$ ouverts de $E$. Rq $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ est un ouvert

Soit $x \in \bigcap_{i=1}^{n} U_i$, alors $\forall k \in [\![1,n]\!]$ $x \in U_k$ or tous les $U_k$ sont ouverts donc des voisinages de $x$.

Donc par la prop des voisinages, $\bigcap_{k=1}^{n} U_k$ est un voisinage de $x$.

5°/ Par passage au complémentaire

6°/ Idem.

Rq : 1) $E$ et $\emptyset$ sont des ouverts de $E$ mais aussi des fermés de $E$ car $E \setminus E = \emptyset$ et $E \setminus \emptyset = E$ sont des ouverts.

2) Dans un evn $(E, \|.\|)$, tout singleton $\{x\}$ est un fermé de $E$ en effet $E \setminus \{x\}$ est 1 ouvert car $\forall y \in E \setminus \{x\}$

$$B(y, \|y-x\|) \subset E \setminus \{x\}$$

3) Dans un evn, toute partie finie est un fermé de $E$ car réunion d'un nombre fini de singletons.

## Intérieur, adhérence et frontière.

Déf : $(E, \|.\|)$ evn, $A \subset E$ et $a \in A$.

1) On dit que $a$ est un point intérieur à $A$ si $A$ est un voisinage de $a$, ie $\exists r \in \mathbb{R}_+^*$ $B(a,r) \subset A$.

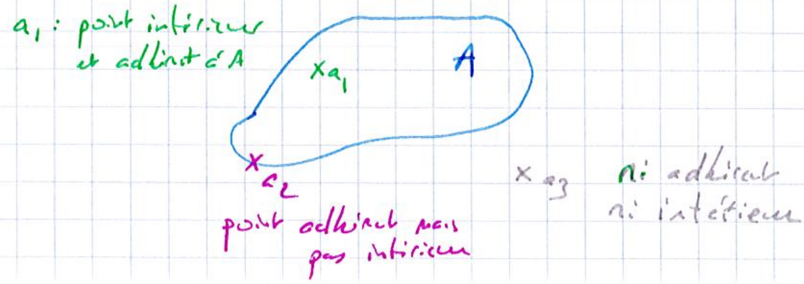
L'ensemble des points intérieurs est appelé intérieur de $A$, noté $\mathring{A}$

2) $a$ est adhérent à $A$ si tout voisinage de $a$ rencontre $A$, ie

$\forall$ voisinage de $a$ $V \cap A \neq \emptyset$

C'est l'adhérence de $A$ noté $\overline{A}$

3) On note frontière de $A$, l'ensemble $Fr(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A}$



Rq : $a \in \bar{A} \iff \forall r \in \mathbb{R}_+^* \quad B(a,r) \cap A \neq \emptyset$

En effet, supposons $a \in \bar{A}$, alors pour tout voisinage de $A$ $V \cap A \neq \emptyset$

en particulier pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$ $B(a,r)$ est voisinage de $a$

donc $B(a,r) \cap A \neq \emptyset$

Récip, $\forall r \in \mathbb{R}_+^*$ $B(a,r) \cap A \neq \emptyset$ et soit $V$ un voisinage de $a$

alors $\exists r' \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B(a,r') \subset V$

or $B(a,r') \cap A \neq \emptyset$. Soit $x \in B(a,r') \cap A$

alors $x \in A$ et $x \in B(a,r') \subset V$

donc $V \cap A \neq \emptyset$ d'où $a \in \bar{A}$

Remarque importante

On a, par déf, $\mathring{A} \subset A$ et $A \subset \bar{A}$ car si $a \in A$ et $V$ voisinage de $A$, $a \in V \cap A$, donc $V \cap A \neq \emptyset$

$$\mathring{A} \subset A \subset \bar{A}$$

Prop. Soit $(E, \|.\|)$ evn et $A \subset E$.

1) $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert de $E$ inclus dans $A$
2) $A$ ouvert de $E \iff A = \mathring{A}$
3) $E \setminus \bar{A} = (E \setminus A)^{\circ}$
4) $\overline{E \setminus A} = E \setminus \mathring{A}$
5) $\bar{A}$ est le plus petit fermé de $E$ contenant $A$
6) $A$ fermé de $E \iff A = \bar{A}$
7) $Fr(A)$ est un fermé de $E$

Preuve : 1) Mq $\mathring{A}$ est un ouvert de $E$.

Soit $a \in \mathring{A}$, mq $\mathring{A}$ est 1 voisinage de $a$

Vu la déf de $\mathring{A}$, $\exists r \in \mathbb{R}_+^*$ tq $B(a,r) \subset A$

$x \in B(a,r)$

$B(a,r)$ cō boule ouverte est un ouvert de $E$. Donc

il existe $r' \in \mathbb{R}_+^*$ tq $B(x,r') \subset B(a,r)$ or $B(a,r) \subset A$

donc $B(x,r') \subset A$.

et $x \in \mathring{A}$

<u>ccl</u> $B(a,r) \subset \mathring{A}$ ($\mathring{A}$ est un ouvert !)

Mq $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert de $E$ inclus dans $A$.

Soit $U$ un ouvert de $E$ inclus dans $A$. Mq $U \subset \mathring{A}$

Soit $x \in U$, cō $U$ ouvert de $E$ $\exists r \in \mathbb{R}_+^*$ $B(x,r) \subset U$

or $U \subset A$ donc $B(x,r) \subset A$, d'où $x \in \mathring{A}$

2°/ $A$ ouvert de $E$

Le plus grand ouvert de $E$ contenu dans $A$ est $A$ donc $\mathring{A} = A$

Recip, si $A = \mathring{A}$, cō $\mathring{A}$ est un ouvert de $E$, $A$ ouvert de $E$.

3°/ Soit $x \in E \setminus \overline{A}$ alors $x \notin \overline{A}$, donc il existe un voisinage $V$ de $x$

tq $V \cap A = \emptyset$

ainsi $V \subset E \setminus A$ et cō $V$ voisinag de $x$, $\exists r \in \mathbb{R}_+^*$

tq $B(x,r) \subset V \subset E \setminus A$

donc $E \setminus A$ est un voisinag de $x$, $x \in \overset{\circ}{(E \setminus A)}$

4°/ On applique 3/ à $E \setminus A$ : donc $E \setminus \overline{E \setminus A} = \overset{\circ}{(E \setminus (E \setminus A))} = \mathring{A}$

donc $E \setminus \mathring{A} = E \setminus (E \setminus (\overline{E \setminus A})) = \overline{E \setminus A}$

5°/ $\overline{A}$ est un fermé de $E$ car via 3) $E \setminus \overline{A} = \overset{\circ}{(E \setminus A)}$ est un ouvert de $E$.

Mq $\overline{A}$ est le plus petit fermé de $E$ contenant $A$.

Soit $F$ fermé de $E$ contenant $A$. Mq $\overline{A} \subset F$

Supposons $\overline{A} \not\subset F$, il existe $x \in \overline{A}$ tq $x \notin F$

donc $x \in E \setminus F$, or $E \setminus F$ est un ouvert de $E$

$\exists r \in \mathbb{R}_+^* \text{ tq } B(x,r) \subset E \setminus F$ (*)

D'autre part $x \in \overline{A}$, $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$. or $A \subset F$

donc $B(x,r) \cap F \neq \emptyset$

$\rightarrow$ contradiction avec (*)

6/ A fermé de E, le plus petit fermé de E contenant A est $\overline{A}$

donc $A = \overline{A}$

Récip, si $A = \overline{A}$, $\overline{A}$ fermé dans E donc A fermé dans E.

7/ On remarque que $\overline{A} \setminus \mathring{A} = \overline{A} \cap (E \setminus \mathring{A})$

car si $x \in \overline{A} \setminus \mathring{A} \Leftrightarrow x \in \overline{A}$ et $x \notin \mathring{A}$

$\Leftrightarrow x \in \overline{A}$ et $x \in E \setminus \mathring{A}$

$$Fr(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \overline{A} \cap (E \setminus \mathring{A}) = \underbrace{\overline{A}}_{\text{fermé}} \cap \underbrace{\overline{E \setminus A}}_{\text{fermé}}.$$

Fr(A) est fermé cō intersection de 2 fermés.

## III <u>Caractérisation séquentielle des points adhérents</u>

**Prop** : Soient $(E, \|.\|)$ evn, $A \subset E$ et $x \in E$

Alors $x \in \overline{A}$ ssi il existe une suite de A convergeant vers x

<u>Preuve</u> : soit $x \in \overline{A}$, il existe V de x tel que $V \cap A \neq \emptyset$

en particulier $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $B(x, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$

ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\exists a_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$ c.a.d.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $a_n \in A$ et $\|x - a_n\| < \frac{1}{n} \xrightarrow[+\infty]{} 0$

On a bien construit une suite cvg de A vers x

<u>Récip</u> : supposons il existe $(a_n)$ suite d'éléments de A cvg vers x

Mq $x \in \overline{A}$

V voisinage de x $\exists r \in \mathbb{R}_+^*$ tq $B(x,r) \subset V$

comme $(a_n)$ cvg. vers x $\exists N \in \mathbb{N}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $n \geq N \Rightarrow \|a_n - x\| < r$

donc $a_N \in B(x,r)$ et $a_N \in A$ donc $a_N \in B(x,r) \cap A$

or $B(x,r) \subset V$ donc $a_N \in V \cap A$

d'où $V \cap A \neq \emptyset$

et $x \in \bar{A}$

Th de Cantor. (caractérisation séquentielle d'un fermé)

Soit $(E, \|.\|)$ evn et $A \subset E$

Alors $A$ est un fermé de $E$ ssi toute suite de $A$ convergeant dans $E$, converge dans $A$.

Autrement dit, $A$ est un fermé de $E$ ssi la limite de toute suite convergente d'éléments de $A$ appartient à $A$.

Preuve : "$\Rightarrow$" $A$ est un fermé dans $E$. alors $A = \bar{A}$

Soit $(a_n)$ suite d'élts de $A$ cvg vers $x \in E$.

prop préc. $\Rightarrow x \in \bar{A}$. or $A = \bar{A}$ donc $x \in A$.

"$\Leftarrow$". supposons que toute suite de $A$ convergeant dans $E$ converge dans $A$

mq $A$ est un fermé de $E$.

$A \subset \bar{A}$, il suffit de montrer que $\bar{A} \subset A$

Soit $x \in \bar{A}$, via la prop précédente, $\exists (a_n)$ de $A$ cvgt vers $x$

d'où $x \in A$ et $\bar{A} \subset A$.

Prop : Soient $(E, \|.\|)$ evn et $d$ la distance associée à $\|.\|$. $A$ partie non vide de $E$ et $x \in E$.

alors $d(x,A) = 0 \Leftrightarrow x \in \bar{A}$

preuve. $\Rightarrow$ supposons $d(x,A) = 0$

Soit $V$ voisinage de $x$, mq $V \cap A \neq \emptyset$

Par déf de $V$, $\exists r \in \mathbb{R}_+^*$ $B(x,r) \subset V$.

D'après la déf de la borne inf. $\exists a \in A$ tq $d(x,a) < d(x,A) + r$

or $d(x,A) = 0$ donc $d(x,a) < r$

d'où $a \in B(x,r) \subset V$

ainsi $a \in V \cap A$ d'où $a \in \bar{A}$

$\Leftarrow$ Soit $\varepsilon > 0$, supposons $x \in \bar{A}$ alors $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

Soit $a \in B(x,\varepsilon) \cap A$ alors $d(a,x) < \varepsilon$

d'après la déf de $d(x,A)$, $d(x,A) \leq d(x,a) < \varepsilon$

donc $\forall \varepsilon > 0$ $0 \leq d(x,A) < \varepsilon$ soit $d(x,A) = 0$.

Rq l'adhérence d'un sous-espace vectoriel est aussi un sev.

($\bar{F}$ non vide car il contient $F$ donc le vecteur non nul.

puis avec la caract. seq des suites)

Densité.

Déf. Soit $(E, \|.\|)$ espace vectoriel normé et $A \subset E$

on dit que $A$ est dense dans $E$ si $\bar{A} = E$

Prop. $A$ est dense dans $E$ ssi tout point de $E$ est limite d'une suite de $A$

## IV Continuité

Prop Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ 2 evn $A \subset E$ et $a \in A$

$f, g : A \to F$ et $\varphi : A \to \mathbb{K}$.

1) si $f$ et $g$ sont continues en $a$, alors $f+g$ continue en $A$

2) si $\varphi$ et $f$ sont continues en $a$, alors $\varphi f$ continue en $A$

3) si $f$ est continue en $a$ alors $\begin{cases} A \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \|f(x)\|_F \end{cases}$ est continue en $a$

**Def** : Soient $(E, \|.\|)$ evn $A \subset E$ et $X \subset A$

on dit que $X$ est un ouvert de $A$ si :

$$\forall x \in X \quad \exists r \in \mathbb{R}_+^* \quad B(x,r) \cap A \subset X$$

On dit que $X$ est 1 fermé de $A$ si $A \setminus X$ est un ouvert de $A$.

**Th d'Hausdorff.**

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ 2 evn $A \subset E$ et $f : A \to E$.

Alors $f$ est continue sur $A$ ssi l'image réciproque de tout ouvert de $F$ est un ouvert de $A$

Preuve : • supposons $f$ continue sur $A$. Mq $f^{-1}(U)$ est 1 ouvert de $A$

soit $a \in f^{-1}(U)$ alors $f(a) \in U$.

or $U$ ouvert de $F$ donc $\exists r \in \mathbb{R}_+^*$ tq $B_F(f(a), r) \subset U$

comme $f$ continue sur $A$, il existe $\eta > 0$ $\forall x \in A$

$$\|x - a\|_E < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_F < r \quad (*)$$

$$\text{donc } B_E(a, \eta) \cap A \subset f^{-1}(U)$$

En effet, soit $x \in B_E(a,\eta) \cap A$ alors via $(*)$

$$f(x) \in B_F(f(a), r)$$

or $B_F(f(a), r) \subset U$ donc $f(x) \subset U$ et $x \subset f^{-1}(U)$

ainsi $B_E(a,\eta) \cap A \subset f^{-1}(U)$ donc $f^{-1}(U)$ est 1 ouvert de $A$.

• Récip : soit $\varepsilon > 0$, $a \in A$. Mq $f$ est continue en $A$.

soit $U = B_F(f(a), \varepsilon)$. comme $f(a) \in U$, $a \in f^{-1}(U)$

or $U$ ouvert de $F$ donc $f^{-1}(U)$ est 1 ouvert de $A$

donc un voisinage de $a$.

$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*$ tq $B_E(a,\eta) \cap A \subset f^{-1}(U)$

$\forall x \in A$, $\|x - a\|_E < \eta$ donc $x \in B_E(a, \eta)$ d'où $x \in f^{-1}(U)$

ainsi $f(x) \in U$ donc $\|f(x) - f(a)\|_F < \varepsilon$

$f$ est continue en $a$.

contre-exemple . image directe d'1 ouvert. Soit $f$, la fonction nulle.

$f(]-1,1[) = 0$ qui n'est pas 1 ouvert.

. image d'1 fermé $f([1;+\infty[) = ]0,1]$

Rq : les ensembles $\{x \in E \mid f(x) > 0\}$ et $\{x \in E \mid f(x) \neq 0\}$ sont des ouverts

— — $\{x \in E \mid f(x) \geq 0\}$ et $\{x \in E \mid f(x) = 1\}$ sont des fermés

## Continuité des application linéaires

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ 2 evn. $f \in \mathcal{L}(E,F)$

Les assertions sont équivalentes.

i) $f$ est continue sur $E$

ii) $f$ est continue en $0$

iii) $f$ est bornée sur $\overline{B_E}(0,1)$

iv) il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tq $\forall x \in E \quad \|f(x)\|_F \leq K\|x\|_E$

v) $f$ est lipschitzienne

vi) $f$ est unif. continue

Preuve i) $\Rightarrow$ ii) ok

vi) $\Rightarrow$ i) ok

v) $\Rightarrow$ vi) ok

ii) $\Rightarrow$ iii) soit $f$ continue en $0$. Alors il existe $\eta > 0$, $\forall x \in E$

$\|x\|_E < \eta \Rightarrow \|f(x)\|_F \leq 1$

Soit $x \in \overline{B_E}(0,1)$.

Alors $\|\frac{\eta}{2}x\|_E = \frac{\eta}{2}\|x\|_E \leq \frac{\eta}{2} < \eta$

donc $\|f(\frac{\eta}{2}x)\|_F \leq 1$

comme $f$ est linéaire,

$f(\frac{\eta}{2}x) = \frac{\eta}{2}f(x)$ donc $\|f(x)\|_F = \frac{2}{\eta}\|f(\frac{\eta}{2}x)\|_F \leq \frac{2}{\eta}$

donc $f$ est bornée sur $\overline{B}_E(0,1)$

iii) $\Rightarrow$ iv) soit $f$ bornée sur $\overline{B}_E(0,1)$.

alors il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tq $\forall x \in E$

$\|x\|_E \leq 1 \Rightarrow \|f(x)\|_F \leq K$

comme $f$ est linéaire, $f(0) = 0$

donc $\|f(x)\|_F \leq K \|x\|_E$ est vérifiée pour $x = 0$

pour $x$ non nul, $\frac{x}{\|x\|} \in \overline{B}_E(0,1)$ donc $\left\|f\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right)\right\|_F \leq K$

par linéarité $\frac{1}{\|x\|_E} \|f(x)\|_F \leq K$ d'où le résultat.

iv) $\Rightarrow$ v).

Supposons $K \in \mathbb{R}_+$ tq $\|f(x)\|_F \leq K \|x\|_E \ \forall x \in E$

Soient $(x,y) \in E^2$, par linéarité de $f$

$\|f(x-y)\|_F = \|f(x) - f(y)\|_F \leq K \|x-y\|_E$

donc $f$ est $K$-lipschitzienne.

Rq : Pour montrer que $f$ n'est pas continue, il suffit de trouver une suite $(x_n)$ de la boule unité tq $(f(x_n))$ ne soit pas bornée.

## V Compacité

Déf : $A$ est compact si toute suite de $A$ admet au moins une suite extraite convergente dans $A$.

Rq $A$ compact, toute suite de $A$ admet au moins une valeur d'adhérence dans $A$.

Prop : Soit $(E, \|.\|_E)$ un evn. Toute partie compacte de $E$ est fermée et bornée.

**Prop** : Soit $(E, \|.\|_E)$ un evn et $A$ un compact de $E$.
Alors toute partie fermée de $A$ est 1 partie compact de $E$.

preuve : $B$ un fermé de $A$. Mq $B$ est 1 compact de $E$.
Soit $(b_n)$ suite de $B$. Comme $B \subset A$, $(b_n)$ suite de $A$.
On peut extraire $(b_{\varphi(n)})$ cvg vers $\ell \in A$.
Or $B$ fermé et $(b_{\varphi(n)})$ est 1 suite de $B$ donc $\ell \in B$
donc $B$ est compact.

**Prop** : $A$ compact de $E$.
Alors toute suite de $A$ converge ssi elle admet une unique valeur d'adhérence

## Parties compactes de $\mathbb{R}^n$

**Prop** $A \subset \mathbb{R}^n$
Alors $A$ est un compact ssi $A$ est fermé et borné.

preuve : Comme dans $\mathbb{R}$ et $x = (x_1, \dots, x_n) \in A$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i| \le K$$

**Prop** : $E, F$ 2 evn, $A$ compact de $E$ et $f : A \to F$ continue sur $A$
alors $f(A)$ est un compact de $F$.

$\Delta$ : l'image réciproque d'un compact par application linéaire n'est pas nécessairement un compact.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1$, $f$ continue, $f^{-1}(\{1\}) = \mathbb{R}$

$\{1\}$ est fermé et borné donc compact.
$\mathbb{R}$ non borné n'est pas compact

**Prop.** $A$ compact de $E$, $B \subset F$ et $f : A \to B$ bijective et continue sur $A$.
Alors $f^{-1}$ est continue sur $B$.

**Def :** $A \subset E$ et $B \subset F$.

On appelle homéomorphisme de $A$ sur $B$ toute application $f$ bijective de $A$ sur $B$ continue sur $A$ et telle que $f^{-1}$ est continue sur $B$.

Ex classique pour transférer des prop de $[0,1]$ sur $[a,b]$

$(a,b) \in \mathbb{R}^2$ $a \neq b$, $E = F = \mathbb{R}$

$$f : \begin{cases} [0,1] \to [a,b] \\ x \mapsto a + (b-a)x \end{cases}$$

est un homéomorphisme où $f^{-1} : \begin{cases} [a,b] \to [0,1] \\ x \mapsto \dfrac{x-a}{b-a} \end{cases}$

**Prop.** $(E, \|.\|_E)$ evn de dim finie et $(F, \|.\|_F)$ evn
Alors toute application linéaire de $E$ vers $F$ est continue

**Preuve :** $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$. Par linéarité

$$\|f(x)\|_F = \left\| \sum_{k=1}^{n} x_k f(e_k) \right\|_F \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| \, \|f(e_k)\|_F$$

or $\forall k \in [\![1,n]\!]$ $|x_k| \leq \max_k |x_k| = \|x\|_\infty$

donc $\|f(x)\|_F \leq \|x\|_\infty \left( \sum_{k=1}^{n} \|f(e_k)\|_F \right)$

Toutes les normes sont équivalentes en dim finie. $\|.\|_E$ est eq $\|.\|_\infty$

donc $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tq $\|x\|_\infty \leq \alpha \|x\|_E$

d'où $\|f(x)\|_F \leq K \|x\|_E$ avec $K = \alpha \sum_{k=1}^{n} \|f(e_k)\|_F$.

Rq En dimension infinie, la proposition est fausse.

$(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|_\infty)$ $\quad f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$
$\qquad P \mapsto P'$

$(P_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{X^n}{n}\right)$ $\quad \|P_n\|_\infty = \frac{1}{n}$

$\|f(P_n)\|_\infty = \|X^{n-1}\|_\infty = 1$

$(P_n)$ suite de $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|_\infty)$ cvg vers 0 tel la suite $(f(P_n))$ ne converge pas vers 0. Donc $f$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}[X]$

Théorème de Bolzano - Weierstraß.

Soit $E$ evn de dim finie.

Alors de toute suite bornée de $E$, on peut extraire une suite convergente dans $E$.

Complétude

Def : $(E, \|\cdot\|)$ evn et $(x_n)$ suite de $E$.

On dit que $(x_n)$ est une suite de Cauchy si

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \ \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2 \quad p \geq N \text{ et } q \geq N \Rightarrow \|x_p - x_q\| < \varepsilon$

Prop : $(E, \|\cdot\|)$ evn. Alors

1) Toute suite de Cauchy de $E$ est bornée

2) Toute suite convergente de $E$ est de Cauchy

3) Toute suite de Cauchy de $E$ possédant une suite extraite convergente, converge

Def : $E$ evn, $A \subset E$.

$A$ est complet si toute suite de Cauchy de $A$ converge dans $A$

On appelle espace de Banach tout espace vectoriel normé complet

On appelle espace de Hilbert tout espace préhilbertien complet.

Ex $(\mathbb{R}, |.|)$ est complet.

Prop E evn
1) Si E est complet, toute partie fermée A de E est complète.
2) Toute partie complète de E est fermée.

Corollaire : E un espace de Banach, $A \subset E$
Alors A est complète ssi A est fermée.

Prop : Tout espace vectoriel normé de dim finie est complet

Prop : E evn, toute partie compacte de E est complète.

Théorème de Riesz

Soit $(E, \|.\|)$ evn.
Alors E est de dimension finie ssi la boule unité fermée $\bar{B}(0,1)$ est compact.