①

Note Endomorphisme adjoint et autoadjoint

Prop et déf : Soit E un espace euclidien et f un endo de E

1) il existe un unique endo f^*, appelé adjoint de f, tel que $\forall u, v \in E$

$$\langle f(u), v\rangle = \langle u, f^*(v)\rangle$$

2) Si $\mathcal{B}$ est une BON de E et si A est la matrice de f dans $\mathcal{B}$ alors la matrice f^* dans $\mathcal{B}$ est ${}^tA$.

Prop de l'adjonction : E euclidien, f, g 2 endo

1) $(f^*)^* = f$
2) $(f+g)^* = f^* + g^*$
3) $(\lambda f)^* = \lambda f^*$
4) $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$

Endo autoadjoint

E euclidien, f est autoadjoint ou symétrique si

$$\forall u, v \in E \quad \langle f(u), v\rangle = \langle u, f(v)\rangle$$

autrement dit $f^* = f$

Matrice d'1 endo symétrique

$\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ base orthonormée de E.

$A = M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B})$ matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Comme $A^* = {}^tA$, l'endo f est symétrique ssi $A = {}^tA$.

autrement dit si A est symétrique

Th. Diagonalisation des endomorphismes symétriques.

1) Soit f un endo sym de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ avec prod. scalaire usuel

   a) les valeurs propres de f sont réelles

   b) les sesp propres de f sont $\perp$ 2 à 2

   c) f est diagonalisable

2) Soit A matrice symétrique à coeff réels. A est diagonalisable et on peut trouver une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}AP = {}^tPAP$ soit diagonale.

Preuve : Notons $\Psi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ l'application définie par

$$\Psi(u,v) = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i \bar{y_i} \quad \text{pour } u = (x_1, \dots, x_n) \text{ et } v = (y_1, \dots, y_n)$$

Ψ est bilinéaire sur $\mathbb{C}^n$, elle possède les prop suivantes :

$$\Psi(u+u', v) = \Psi(u,v) + \Psi(u',v)$$
$$\Psi(u, v+v') = \Psi(u,v) + \Psi(u,v')$$
$$\Psi(\lambda u, v) = \lambda \Psi(u,v)$$
$$\Psi(u, \lambda v) = \bar{\lambda} \Psi(u,v)$$
$$\Psi(u,u) = \sum_{1 \leq i \leq n} |x_i|^2 \geq 0 \quad \text{et} \quad \Psi(u,u) = 0 \Rightarrow u = 0$$

Notons A la matrice de f dans $\mathbb{R}^n$. $A \in M_n(\mathbb{R})$

Considérons A comme matrice à coeff complexes de l'appli $g : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$

χ_A est à coeff réels, donc si a est racine de χ_A alors $\bar{a}$ est racine de χ_A.

$\forall u, v \in \mathbb{C}^n \quad \Psi(g(u), v) = \Psi(u, g(v))$ car tous les coeff de g sont réels.

Soit λ vp de A et $u = (x_1, \dots, x_n)$ vecteur propre associé à λ

on a $\Psi(g(u), u) = \Psi(\lambda u, u) = \lambda \Psi(u,u)$

or $\Psi(g(u), u) = \Psi(u, g(u)) = \Psi(u, \lambda u) = \bar{\lambda} \Psi(u,u)$

donc $\lambda = \bar{\lambda}$ car $\Psi(u,u) > 0$

b) Soit λ et μ 2 valeurs propres distinctes réelles de A, associées à u et v dans $\mathbb{R}^n$

$\lambda \langle u, v\rangle = \mu \langle u, v\rangle \Rightarrow (\lambda - \mu)\langle u, v\rangle = 0$

or $\lambda \neq \mu$ donc $\langle u, v\rangle = 0$

et u et v sont $\perp$.

c) Si la somme F des espaces propres associés aux différentes vp de A n'est pas $\mathbb{R}^n$, $F^\perp$ n'est pas réduit à $\{0\}$

l'espace F est stable par f car tout vecteur de F est comb. linéaire des vect. propres de f.

Soit $u \in F^\perp$ $\forall v \in F$ $\langle f(u), v\rangle = \langle u, f(v)\rangle = 0$

car $f(v) \in F$.

donc $F^\perp$ stable par f.

$f' = f_{|F^\perp}$ est 1 endo sym, on voit de suite qu'il existe dans $F^\perp$ un vecteur propre de f' donc de f, ce qui contredit la def de F.