Th. 1 - Soit $f$ un endo autoadjoint d'1 espace euclidien, alors

Grifone p255

1) $f$ est diagonalisable

2) Les sous-espaces propres de $f$ sont 2 à 2 $\perp$

En particulier, on peut construire une base orthonormée de vecteurs propres en choisissant une base orthonormée dans chaque espace propre.

Th 2 - Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et les espaces propres sont deux à deux orthogonaux (pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$)

Th 3 - Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique. Il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $A' = {}^tPAP$ est diagonale.

<u>Démo</u> - 1) Montrons que le polynôme caractéristique est scindé, c.à.d que toutes les valeurs propres sont réelles

Soit $A$ matrice qui représente $f$ dans une base orthonormée et $\lambda$ valeur propre, réelle ou complexe, de $A$.
$\lambda$ existe car $P_A(X)$ est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de d'après le th de d'Alembert, admet au moins 1 racine.

$\rightarrow$ mq $\lambda \in \mathbb{R}$.

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{C})$, matrice d'1 vecteur propre $v$ correspondant à $\lambda$

Puisque $A$ est symétrique

$$^t(AX)\,\overline{X} = {}^tX\,{}^tA\,\overline{X}$$
$$= {}^tX A \overline{X} \quad (*)$$

et $AX = \lambda X$ donc $\overline{AX} = \overline{\lambda}\,\overline{X}$ (1)

$A$ réelle donc $\overline{A} = A$

(1) $A\overline{X} = \overline{\lambda}\,\overline{X}$

avec (*) $\quad {}^t(\lambda X)\overline{X} = {}^t X \overline{\lambda}\overline{X}$

$$\text{d'où } \lambda\left(|x_1|^2+\dots+|x_n|^2\right) = \overline{\lambda}\left(|x_1|^2+\dots+|x_n|^2\right)$$

soit $\lambda = \overline{\lambda}$ puisque $v \neq 0$

$\rightarrow$ les valeurs propres sont réelles.

2) Mq par récurrence sur la dimension de $E$ qu'il existe une base de vecteurs propres.

Pour $n=1 \rightarrow$ rien à démontrer.

Supposons la prop vraie pour $n-1$. Soit $\lambda$ vp de $f$, $x$ vect.p. et $H = \mathrm{Vect}\{x\}^\perp$.

on a $\dim H = n-1$

- $H$ est stable par $f$ ($f(H) \subset H$)

car soit $y \in H$ ($y \perp x$), mq $f(y) \in H$. donc $f(y) \perp x$

$\langle f(y), x\rangle = \langle y, f(x)\rangle = \lambda\langle y, x\rangle = 0$

- par ailleurs $\hat{f}$ est un endo autoadjoint de $H$.

car si $v, w \in H$

$\langle \hat{f}(v), w\rangle_H = \langle f(v), w\rangle_E = \langle v, f(w)\rangle_E = \langle v, \hat{f}(w)\rangle_H$

or $\dim H = n-1$, d'après l'hyp de récurrence il existe une base $\{e_2, \dots, e_n\}$ formée de vecteurs propres de $\hat{f}$.

Il est clair que $\{x, e_2, \dots, e_n\}$ est 1 base formée de vect. propres de $f$.

3) Mq les sous-espaces propres de $f$ sont 2 à 2 $\perp$.

Soient $v_1$ et $v_2$ vect. propres correspondants à $\lambda_1$, $\lambda_2$ $\lambda_1 \neq \lambda_2$

mq $v_1 \perp v_2$

on a $\langle f(v_1), v_2\rangle = \lambda_1\langle v_1, v_2\rangle$

$f$ est autoadjoint donc

$\langle f(v_1), v_2\rangle = \langle v_1, f(v_2)\rangle = \lambda_2\langle v_1, v_2\rangle$

donc $(\lambda_1 - \lambda_2) \langle v_1, v_2 \rangle = 0$

et $\lambda_1 \neq \lambda_2$ donc $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$

---

Ex TEO MP* p839

$u$ un endo sym d'1 espace vectoriel euclidien dont le spectre est inclus dans $\mathbb{R}_+$

1°/ Montrer qu'il existe un endo sym $v$ tq $u = v^2$

2°/ Montrer que $v$ est unique si l'on impose $sp(v) \subset \mathbb{R}_+$

lemme de la racine carrée

1°/ Soit $\mathcal{B}$ base orthonormée de $E$ et $A = mat_{\mathcal{B}}(u)$

d'après le théorème spectral

$\exists P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D \in M_n(\mathbb{R})$ diagonale tq

$A = P^{-1} D P$

or $sp(A) \subset \mathbb{R}_+$ donc $D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$ sont positifs

Soit $D' = \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{d_n} \end{pmatrix}$ tq $D = D'^2$

on a $A = P^{-1} D'^2 P$

$= (P^{-1} D' P)^2 = B^2$

comme $P$ est orthogonale $P^{-1} D' P = B$ est symétrique

on choisit $v$ tq $B = Mat_{\mathcal{B}}(v)$

2°/ Montrons que $v$ est l'unique.

considérons $w$ un endo sym tq $w^2 = u$ et $sp(w) \subset \mathbb{R}_+$

Tout d'abord $w$ et $w^2$ commutent, donc $w$ et $u$ commutent.

cet endomorphisme laisse stable les sous-espaces propres de $u$.

Notons que $\forall \lambda \in sp(u)$, $\omega_\lambda = \sqrt{\lambda}\, Id_{E_\lambda(u)}$ ce qui prouve que ~~$u$~~ et $\omega$ coïncident sur chaque sous-espace propre de $u$.

$\omega_\lambda$ est symétrique et de valeurs propres positives.

$\exists$ une base de $E_\lambda(u)$ dans laquelle sa matrice $D_\lambda$ est diagonale à coeff positifs et tq $D_\lambda^2 = \lambda I_{n_\lambda}$

avec $n_\lambda = \dim E_\lambda(u)$

donc $D_\lambda = \sqrt{\lambda}\, I_{n_\lambda}$, d'où $\omega_\lambda = \sqrt{\lambda}\, Id_{E_\lambda(u)}$

<u>Décomposition polaire.</u>

1°/ Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$

mq ${}^tMM$ est sym à valeurs propres positives.

2°/ $M \in Gl_n(\mathbb{R})$

Mq $\exists ! (O, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n(\mathbb{R})$ tq $M = OS$ et $sp(S) \subset \mathbb{R}_+$

1°/. ${}^t({}^tMM) = {}^tM\,{}^t({}^tM) = {}^tMM$ donc ${}^tMM$ est symétrique.

Soit $\lambda$ vp de ${}^tMM$ et $X$ vecteur propre

$${}^tMMX = \lambda X$$

$${}^tX\,{}^tM\,MX = \lambda\,{}^tXX$$

donc. $\|MX\|^2 = \lambda \|X\|^2$

soit $\lambda \geq 0$

2°/ Supposons qu'un tel couple existe. <u>Analyse - Synthèse.</u>

$${}^tM = {}^t(OS) = {}^tS\,{}^tO = SO^{-1}$$

donc ${}^tMM = SO^{-1}OS = S^2$

d'où $S$ est unique d'après le lemme de la racine carrée.

③

$\Omega = OS$ donc $\operatorname{Ker} S \subset \operatorname{Ker} \Omega$ et $\Omega \in GL_n(\mathbb{R})$

donc $S$ est inversible

et $O = \Omega S^{-1}$.

Ainsi un tel couple s'il existe est unique

- Vérifions que le couple obtenu par analyse convient.

c.a.d $O = \Omega S^{-1}$ est orthogonal.

$${}^tO O = {}^t(\Omega S^{-1}) \Omega S^{-1} = {}^tS^{-1} \, {}^t\Omega \Omega S^{-1}$$

$$= S^{-1} S^2 S^{-1} = I_n$$

donc le couple convient, $O$ est orthogonal.